Les incontournables du TVI

Enoncé des problèmes résolus dans cette vidéo :

Exercice 1

$f(x) = x^3 + x - 7$

1) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 2].

2) Proposer un encadrement de α à 10^{-3} près.

3) En déduire le tableau de signe de f.

4) Montrer que $\alpha^3 = 7 - \alpha$

Exercice 2

Le tableau de variation de g étant donné, déterminer le nombre de solutions de l'équation g(x) = 5 .

x	1		4		10		13
g'(x)		+	0	-	0	+	
g(x)	2	↗	7	↘	3	↗	4

Exercices complémentaires suivis de leur corrigé :

Exercice 3

$f(x) = 11x^2 - \exp(x) - 11$

1) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une et une seule solution α sur l'intervalle [1 ; 3].

2) Proposer un encadrement de α à 10^{-3} près.

3) En déduire le tableau de signe de f.

4) Montrer que $\alpha^2 = \frac{1}{11}\,(\exp(\alpha) + 11)$

Exercice 4

Le tableau de variation de g étant donné, déterminer le nombre de solutions de l'équation g(x) = - 3 .

x	0		3		5		8		45
Signe de g'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
Variations de g(x)	-4	↘	-10	↗	3	↘	-5	↗	7

Exercice 5

$f(x) = \frac{1}{3x+1} + 2x + 3$

1) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une et une seule solution α sur l'intervalle [- 2 ; - 1].

2) Proposer un encadrement de α à 10^{-3} près.

3) En déduire le tableau de signe de f.

4) Montrer que $10\,\alpha^2 + 17\,\alpha + 2 = 0$

Exercice 6

Le tableau de variation de g étant donné, déterminer le nombre de solutions de l'équation g(x) = 0 .

x	$-\infty$		-6		0		2		$+\infty$
Signe de g'		+	0	-	0	+	$\Vert$	+	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	-10	$\searrow$	-11	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Correction Exercice 3

$f(x) = 11x^2 - \exp(x) - 11$

1) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une et une seule solution α sur l'intervalle [1 ; 3]

Nous étudions les variations de f sur l'intervalle [1 ; 3].

$f'(x) = 22x - \exp(x)$

Nous avons $1 < x < 3$

Donc $22 < 22x < 66$

Et $-\exp(3) < -\exp(x) < -\exp(1)$ car exp est une fonction croissante donc –exp est décroissante sur R

D'où $0 < 22 - \exp(3) < 22x - \exp(x) < 66 - \exp(1)$

Donc f est strictement croissante sur [1 ; 3].

Voici son tableau de variation sur [1 ; 3] :

x	1	α	3
Signe de f’		+	
Variations de f	-e	0	88 – exp(3) > 0
Signe de f	-	0	+

f est strictement croissante sur [1 ; 3]

Et $f(1) = -e < 0 < 88 - \exp(3) = f(3)$

Donc d’après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α à l’équation f(x) = 0, sur l’intervalle [1 ; 3].

2) Proposer un encadrement de α à 10^{-3} près.

A l’aide de la calculatrice nous commençons par approximer α à 10^{-1} près. Nous faison varier x entre 1 et 3 avec un pas de 0.1 :

x	f(x)
1	-2.71828183
1.1	-0.69416602
1.2	1.51988308
1.3	3.92070333
1.4	6.50480003

On voit que le signe change entre 1,1 et 1,2 donc on réalise un second tableau où x varie entre 1,1 et 1,2 avec un pas de 0,01 cette fois :

x	f(x)
1.1	-0.69416602
1.11	-0.48125839
1.12	-0.2664542
1.13	-0.0497565
1.14	0.16883163
1.15	0.38930709
1.16	0.61166672
1.17	0.83590736
1.18	1.0620258
1.19	1.29001879
1.2	1.51988308

On voit que le signe de f change entre 1,13 et 1,14 donc on réitère l'opération précédente en choisissant un pas de 0,001 et en faisant varier x entre 1,13 et 1,14 :

x	f(x)
1.13	-0.0497565
1.131	-0.0279827
1.132	-0.00619001
1.133	0.01562159
1.134	0.03745208
1.135	0.05930146
1.136	0.08116973
1.137	0.10305688
1.138	0.12496292
1.139	0.14688784
1.14	0.16883163

On voit que f change de signe entre 1,132 et 1,133.

Ainsi, comme $f(1{,}132) < 0$ et $f(1{,}133) > 0$, $\alpha \in [1{,}132 ; 1{,}133]$

3) En déduire le tableau de signe de f

D'après le tableau fourni à la question 1), nous avons :

$f > 0$ pour x appartenant à l'intervalle $[\alpha ; 3]$ et $f < 0$ pour x appartenant à l'intervalle $[1 ; \alpha]$

4) Montrer que $\alpha^2 = \frac{1}{11}(\exp(\alpha) + 11)$

Par définition de α, f(α) = 0

Et $f(x) = 11x^2 - \exp(x) - 11$

Donc en remplaçant x par α dans ce qui précède, cela nous donne :

$f(\alpha) = 11\alpha^2 - \exp(\alpha) - 11 = 0$

Ou encore, en isolant α^2 dans le membre de gauche : $\alpha^2 = \frac{1}{11}(\exp(\alpha) + 11)$

Correction Exercice 4

Le tableau de variation de g étant donné, déterminer le nombre de solutions de l'équation g(x) = - 3 .

x	0		3		5		8		45
Signe de g'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
Variations de g(x)	-4	↘	-10	↗	3	↘	-5	↗	7

- ∀ x ∈ [0 ; 3], g(x) < -3 donc l'équation g(x) = -3 n'admet pas de solution sur cet intervalle.
- g est strictement croissante sur [3 ; 5],

  Et g(3) = -10 < -3 < 3 = g(5)

  Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g(x) = -3 admet une unique solution sur l'intervalle [3 ; 5].

- De la même façon, on montre que g(x) = -3 admet une unique solution respectivement sur l'intervalle [5 ; 8], où g est strictement décroissante, et une unique solution sur l'intervalle [8 ; 45], où g est strictement croissante.

Conclusion : g(x) = -3 admet 3 solutions sur l'intervalle [0 ; 45].

Correction Exercice 5

$f(x) = \dfrac{1}{5x+1} + 2x + 3$

1) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une et une seule solution α sur l'intervalle [- 2 ; - 1].

f n'est pas définie en -1/5 (valeur interdite pour la fraction rationnelle). Cependant, cette valeur n'appartient pas à l'intervalle d'étude, à savoir [- 2 ; - 1].

Nous pouvons donc étudier les variations de f sur [- 2 ; - 1] :

$f'(x) = \dfrac{-5}{(5x+1)^2} + 2 = \dfrac{-5 + 2(25x^2 + 10x + 1)}{(5x+1)^2} = \dfrac{50x^2 + 20x - 3}{(5x+1)^2}$

f' s'annule si son numérateur s'annule càd si $50x^2 + 20x - 3 = 0$.

Nous avons x > -2 donc 20x -3 > - 43

Par ailleurs -2 < x < -1

donc $1 < x^2 < 4$ car x^2 est décroissante sur R^-

donc $50 < 50x^2 < 200$

Donc $0 < 7 < 50x^2 + 20x - 3 = f'(x)$

Donc f' est strictement positive sur l'intervalle [- 2 ; - 1].

Ceci nous permet de dresser le tableau de variation de f sur ce même intervalle :

x	- 2	α	- 1
Signe de f'		+	
Variations de f	$\frac{-10}{9}$	0	$\frac{3}{4}$
Signe de f	-	0	+

f est strictement croissante sur [-2 ; - 1]

Et f(- 2) = $\frac{-10}{9}$ < 0 < $\frac{3}{4}$ = f(- 1)

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α à l'équation f(x) = 0, sur l'intervalle [-2 ; - 1]

2) Proposer un encadrement de α à 10^{-3} près.

A l'aide de la calculatrice nous commençons par approximer α à 10^{-1} près. Nous partons de -2 et faisons varier x jusqu'à -1, avec un pas de 0,1 :

x	f(x)
-2	-1.11111111
-1.9	-0.91764706
-1.8	-0.725
-1.7	-0.53333333
-1.6	-0.34285714
-1.5	-0.15384615
-1.4	0.03333333
-1.3	0.21818182
-1.2	0.4
-1.1	0.57777778
-1	0.75

On observe que f change de signe entre -1,5 et -1,4. On fait donc varier x avec un pas 0,01, entre -1,5 et -1,6 :

x	f(x)
-1.5	-0.15384615
-1.49	-0.13503876
-1.48	-0.11625
-1.47	-0.09748031
-1.46	-0.07873016
-1.45	-0.06
-1.44	-0.04129032
-1.43	-0.02260163
-1.42	-0.00393443
-1.41	0.01471074

-1.4	0.03333333

f change de signe entre -1,42 et -1,41. Nous réalisons donc un troisième tableau dans lequel x varie entre -1,42 et -1,41 avec un pas de 0,001 :

x	f(x)
-1.42	-0.00393443
-1.419	-0.00206891
-1.418	-0.00020361
-1.417	0.00166146
-1.416	0.00352632
-1.415	0.00539095
-1.414	0.00725535
-1.413	0.00911954
-1.412	0.0109835
-1.411	0.01284723
-1.41	0.01471074

On voit que f change de signe entre -1,418 et -1,417.

Ainsi, comme f(- 1,418) < 0 et f(- 1,417) > 0, $\alpha \in [-1{,}418 ; -1{,}417]$

Remarque : Dans une copie de DS ou de bac, il ne serait pas nécessaire de recopier les tableaux complets sur votre copie.

3) En déduire le tableau de signe de f.

D'après le tableau fourni à la question 1), nous avons :

f est positive sur l'intervalle [α ; 1] et f est négative sur l'intervalle [- 2 ; α]

4) Montrer que $10\alpha^2 + 17\alpha + 2 = 0$

Par définition, α vérifier f(α) = 0

avec $f(x) = \dfrac{1}{5x+1} + 2x + 3$

Nous développons f en mettant tous ses termes au même dénominateur :

$$f(x) = \frac{1 + 2x(5x + 1) + 3(5x + 1)}{5x + 1} = \frac{10x^2 + 17x + 2}{5x + 1}$$

Donc $f(\alpha) = 0$ si $\dfrac{10\alpha^2 + 17\alpha + 2}{5\alpha + 1} = 0$

Càd si $10\alpha^2 + 17\alpha + 2 = 0$.

Conclusion : α vérifie bien l'équation suivante : $10\,\alpha^2 + 17\,\alpha + 2 = 0$

Correction Exercice 6

Le tableau de variation de g étant donné, déterminer le nombre de solutions de l'équation g(x) = 0 .

x	$-\infty$		-6		0		2		$+\infty$
Signe de g'		+	0	-	0	+	‖	+	
Variations de g	$-\infty$	↗	-10	↘	-11	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

- $\forall x \in]-\infty ; -6]$, $g(x) < 0$ donc l'équation g(x) = 0 n'admet pas de solution sur cet intervalle.
- De même, nous montrons que g(x) = 0 n'admet pas de solution sur l'intervalle [- 6 ; 0].
- g est strictement croissante sur [0 ; 2[,

  Et $g(0) = -11 < 0 < +\infty = \lim_{x\to 2} g(x)$

  Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g(x) = 0 admet une unique solution sur l'intervalle [0 ; 2[.

- De la même façon, on montre que g(x) = 0 admet une unique solution sur l'intervalle $]\,2 ; +\infty[$, où g est strictement croissante.

Conclusion : g(x) = 0 admet 2 solutions sur R.