Suite 2

Etude d'une suite homographique

Enoncé du problème résolu dans cette vidéo

Exercice 1

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{5U_n + 2}{U_n + 4} \\ \text{avec } U_0 = 0 \end{cases}$$

1) Etudier les variations de f

2) Calculer U_1, U_2, U_3.. Conjecturer les variations de (U_n).

3) Démontrer par récurrence que $\forall n$ $U_n \in [0\ ;\ 2]$

4) Démontrer votre conjecture sur les variations de (U_n)

5) Dans le repère ci-joint a été tracé C_f. Retrouver graphiquement les cinq premiers termes de U_n. Conjecturer sa limite.

6) Démontrer que (U_n) converge puis déterminer sa limite.

Exercices complémentaires suivis de leur correction

Exercice 2

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{-4U_n + 7}{U_n - 10} \\ \text{avec } U_0 = 1 \end{cases}$$

1) Etudier les variations de f

2) Calculer U_1, U_2, U_3.. Conjecturer les variations de (U_n).

3) Démontrer par récurrence que $\forall n$ $U_n \in [-1 ; 1]$

4) Démontrer votre conjecture sur les variations de (U_n)

5) Démontrer que (U_n) converge puis déterminer sa limite.

Exercice 3

$$U_{n+1} = \frac{5U_n + 2}{3U_n + 4}$$

1) Etudier les variations de f puis montrer par récurrence que (U_n) est croissante.

2) Montrer par récurrence que $\forall n$ $U_n \in [0 ; 1]$

3) En déduire que (U_n) converge et déterminer sa limite.

Correction Exercice 2

1) Etudier les variations de f

Nous rappelons tout d'abord que (U_n) est définie comme suit :

$U_{n+1} = f(U_n)$

Avec $f(x) = \dfrac{-4x+7}{x-10}$ définie et dérivable pour tout x différent de 10, la valeur interdite.

Afin d'étudier les variations de f, nous étudions le signe de sa dérivée puis nous dressons son tableau de variation.

Nous rappelons que $f = \dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Ceci nous donne :

$$f'(x) = \frac{-4(x-10) - 1(-4x+7)}{(x-10)^2} = \frac{-4(x-10) - 1(-4x+7)}{(x-10)^2} = \frac{33}{(x-10)^2} > 0$$

D'où le tableau de signe de la fonction f:

x	$-\infty$	10	$+\infty$
Signe de f'	+	||	+
Variations de f	$-4 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow -4$

2) Calculer U_1, U_2, U_3.. Conjecturer les variations de (U_n).

$$U_1 = \frac{-4U_0+7}{U_0-10} = \frac{-4+7}{1-10} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3} < 1$$

$$U_2 = \frac{-4U_1+7}{U_1-10} = \frac{-4\left(-\frac{1}{3}\right)+7}{-\frac{1}{3}-10} = \frac{\frac{25}{3}}{-\frac{31}{3}} = -\frac{25}{31} < -\frac{1}{3}$$

$U_3 = \dfrac{-4U_2+7}{U_2-10} = \dfrac{-4\left(-\frac{25}{31}\right)+7}{-\frac{25}{31}-10} = \dfrac{\frac{317}{31}}{-\frac{335}{31}} = -\dfrac{317}{335} < -\dfrac{25}{31}$

Récapitulons :

$U_0 = 1$

$U_1 = -\frac{1}{3} < 1$

$U_2 = -\frac{25}{31} < -\frac{1}{3}$

$U_3 = -\frac{317}{335} < -\frac{25}{31}$

D'après les 4 premiers termes de la suite (U_n), la suite est strictement décroissante.

3) Démontrer par récurrence que $\forall n\ U_n \in [-1\ ;\ 1]$

Montrons par récurrence que la propriété P_n qui suit est vraie pour tout $n \geq 0$:

P_n : $U_n \in [-1\ ;\ 1]$

Initialisation : Au rang n = 0, $U_0 = 1 \in [-1\ ;\ 1]$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un entier $n \geq 0$ fixé, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$-1 \leq U_n \leq 1$

Donc $f(-1) \leq f(U_n) \leq f(1)$ car f est croissante sur $[-\infty\ ;\ 10[$ et par hypothèse de récurrence, $U_n \in [-1\ ;\ 1]$

$f(-1) = \dfrac{-4(-1)+7}{-1-10} = \dfrac{11}{-11} = -1$

et $f(1) = \dfrac{-4(1)+7}{1-10} = \dfrac{3}{-9} = -\dfrac{1}{3}$

Donc $-1 \leq \dfrac{-4U_n+7}{U_n-10} \leq -\dfrac{1}{3} < 1$

Donc $U_{n+1} \in [-1 ; 1]$

P_{n+1} est vraie donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : P_0 est vraie et la propriété se transmet, donc d'après le principe de récurrence, $\forall\, n \geq 0$, P_n vraie.

4) Démontrer votre conjecture sur les variations de (U_n)

Montrons par récurrence que la propriété P_n qui suit est vraie pour tout $n \geq 0$:

P_n : (U_n) est décroissante : $U_n > U_{n+1}$

Initialisation : D'après la question 2), nous avons $U_1 = -\dfrac{1}{3} < 1 = U_0$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un entier $n \geq 0$ fixé, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$U_n > U_{n+1}$

Donc $f(U_n) > f(U_{n+1})$ car f est croissante sur $]-\infty ; 10[$ et d'après 3), pour tout n, $U_n \in [-1 ; 1]$ et donc à $]-\infty ; 10[$

D'où $U_{n+1} > U_{n+2}$

P_{n+1} est vraie donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : P_0 est vraie et la propriété se transmet, donc d'après le principe de récurrence,

$\forall$ n ≥ 0, P_n vraie : $U_n > U_{n+1}$

Ainsi nous avons montré que la suite (U_n) est décroissante.

5) Démontrer que (U_n) converge puis déterminer sa limite.

D'après la question 3), (U_n) est minorée et d'après la question 4), (U_n) est décroissante.

Donc (U_n) converge vers une limite l finie.

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

Ainsi, en passant à la limite dans l'expression de (U_n), nous obtenons l'expression en l suivante :

$$l = \frac{-4l+7}{l-10}$$

Nous résolvons cette expression pour obtenir les limites possibles pour la suite (U_n) :

$l\,(l-10) = (-4l+7) \iff l^2 - 10l + 4l - 7 = 0$

$\iff l^2 - 6l - 7 = 0$

$\Delta = 64 > 0$

Donc l'équation admet deux solutions :

$l_1 = -1$ et $l_2 = 7$

D'où : $l^2 - 6l - 7 = (l+1)(l-7)$

Les limites possibles sont donc -1 et 7.

De toute évidence, comme nous avons montré dans la question 3) que (U_n) appartient à [-1 ;1], il est impossible que la suite converge vers 7.

Ainsi (U_n) converge vers -1.

Correction Exercice 3

$U_{n+1} = \dfrac{5U_n + 2}{3U_n + 4}$

1) Etudier les variations de f puis montrer par récurrence que (U_n) est croissante.

(U_n) est définie comme suit : $U_{n+1} = f(U_n)$

Avec $f(x) = \dfrac{5x + 2}{3x + 4}$ qui admet $-\dfrac{4}{3}$ comme valeur interdite

Nous dérivons f à l'aide de la formule de dérivation d'un quotient de fonctions:

$f = \dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Donc $f'(x) = \dfrac{5(3x + 4) - 3(5x + 2)}{(3x + 4)^2} = \dfrac{14}{(3x + 4)^2} > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur R.

Montrons par récurrence que la propriété P_n qui suit est vraie pour tout $n \geq 0$:

P_n : $U_n < U_{n+1}$

Initialisation : Nous avons $U_1 = \dfrac{1}{2} > 0 = U_0$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un entier $n \geq 0$ fixé, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$U_n < U_{n+1}$

f est croissante sur R donc nous pouvons l'appliquer à l'inégalité précédente sans en changer le sens :

$f(U_n) < f(U_{n+1})$

Or par définition, $U_{n+1} = f(U_n)$ et donc également $U_{n+2} = f(U_{n+1})$

D'où $U_{n+1} < U_{n+2}$

Donc la propriété P_{n+1} est vraie.

Donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : P_0 est vraie et la propriété se transmet, donc d'après le principe de récurrence,

$\forall\ n \geq 0$, P_n vraie : $U_n < U_{n+1}$

Ainsi nous avons montré que la suite (U_n) est croissante.

2) Montrer par récurrence que $\forall n\ U_n \in [0 ; 1]$

Montrons par récurrence que la propriété P_n qui suit est vraie pour tout $n \geq 0$:

P_n : $U_n \in [0 ; 1]$

Initialisation : Nous avons $U_0 = 0 \in [0 ; 1]$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un entier $n \geq 0$ fixé, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$0 < U_n < 1$

Dans la question 1), nous avons vu que la fonction f est croissante sur R donc nous pouvons l'appliquer à l'inégalité précédente sans en changer le sens :

$f(0) < f(U_n) < f(1)$

$0 < f(0) = \frac{1}{2} < U_{n+1} < 1 = f(1)$

Donc la propriété P_{n+1} est vraie.

Donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : P_0 est vraie et la propriété se transmet, donc d'après le principe de récurrence,

$\forall\, n \geq 0$, P_n vraie : $U_n \in [0 ; 1]$

3) En déduire que (U_n) converge et déterminer sa limite.

Dans la question 1), nous avons montré que (U_n) est croissante et dans la question 2), qu'elle est majorée

Donc (U_n) converge.

Notons l sa limite.

Par définition, l vérifie $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$

En passant à la limite dans l'expression de U_{n+1}, nous obtenons :

$l = \frac{5l + 2}{3l + 4}$

Ceci nous donne encore :

$l(3l + 4) = (5l + 2) \Leftrightarrow 3l^2 + 4l - 5l - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3l^2 - l - 2 = 0$

Nous résolvons cette équation du 2nd degré en l à l'aide de la méthode du discriminant. Ceci nous donne :

$\Delta = 25 > 0$

$l_1 = 1$ et $l_2 = \frac{2}{3}$

Donc les limites possibles pour la suite (U_n) sont 1 et $\frac{2}{3}$.

Or $U_1 = \frac{5U_0 + 2}{3U_0 + 4} = \frac{5*0+2}{3*0+4} = \frac{1}{2}$

$U_2 = \frac{5U_1 + 2}{3U_1 + 4} = \frac{5*\frac{1}{2}+2}{3*\frac{1}{2}+4} = \frac{9}{11} > \frac{2}{3}$

Par ailleurs, (U_n) est croissante. Donc (U_n) ne peut pas tendre vers $\frac{2}{3}$ puisque dès le troisième terme elle est plus grande que $\frac{2}{3}$.

Ainsi, comme nous avons montré que (U_n) admet une limite et que cette limite ne peut pas être $\frac{2}{3}$, la limite de (U_n) est 1.

Conclusion : (U_n) converge vers 1.