Suite 2

Limites de Suites

Partie 2

Enoncé des problèmes résolus dans cette vidéo

Exercice 1

1)

Déterminer les limites des suites :

$U_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$V_n = \frac{\cos n}{n^3}$

$W_n = (3 + \cos(\frac{n\pi}{4}))^n$

2)

$U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{U_n - 5}$

On admet que (U_n) converge vers une limite l.

Déterminer cette limite.

Exercices complémentaires suivis de leur correction

Exercice 2

1)

Déterminer les limites des suites suivantes:

$U_n = \frac{\sin n}{n}$

$V_n = (4 + \sin(\frac{n\pi}{2}))^n$

$W_n = \dfrac{(-1)^n(n^2-2)}{3n^4+n+5}$

2)

$U_{n+1} = \dfrac{9U_n + 7}{U_n + 3}$

Déterminer les limites éventuelles de la suite (U_n).

Correction Exercice 2

1)

$U_n = \dfrac{\sin n}{n}$

Nous allons utiliser le théorème d'encadrement pour trouver la limite de la suite (U_n).

En effet, pour tout n :

$-1 < \sin n < 1$

Donc $-\frac{1}{n} < \frac{\sin n}{n} < \frac{1}{n}$

Or d'après le cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$

Donc d'après le théorème de comparaison (ou par théorème d'encadrement ou encore par le théorème des gendarmes, toutes ses justifications sont valables),

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

$V_n = (4 + \sin(\frac{n\pi}{2}))^n$

Nous pouvons à nouveau encadrer les différents termes se trouvant sous la puissance pour parvenir à calculer la limite demandée :

Pour tout n: $-1 < \sin(\frac{n\pi}{2}) < 1$

$3 < 4 + \sin(\frac{n\pi}{2}) < 5$

$3^n < (4 + \sin(\frac{n\pi}{2}))^n < 5^n$

Or $\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

Donc par théorème de comparaison (ou inégalités sur les limites), $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

$$W_n = \frac{(-1)^n(n^2-2)}{3n^4+n+5}$$

La limite de cette suite présente une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Nous commençons par factoriser le numérateur et le dénominateur :

$$W_n = \frac{(-1)^n n^2(1-\frac{2}{n^2})}{n^4(3+\frac{1}{n^3}+\frac{5}{n^4})} = \frac{(-1)^n}{n^2} \times \frac{1-\frac{2}{n^2}}{3+\frac{1}{n^3}+\frac{5}{n^4}}$$

Nous avons:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} = 0$$

Donc par somme, nous avons:

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{n^2} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{1}{n^3} + \frac{5}{n^4} = 1$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{3n^3}+\frac{5}{3n^4}} = 1$ par quotient

Nous déterminons la limite de $\frac{(-1)^n}{3n^2}$ à l'aide du théorème d'encadrement :

$-1 < (-1)^n < 1$

Donc $-\frac{1}{3n^2} < \frac{(-1)^n}{3n^2} < \frac{1}{3n^2}$

pour tout n entier naturel

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{3n^2} = 0$

Donc d'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2} = 0$

Et finalement par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$

2)

$U_{n+1} = \frac{9U_n + 7}{U_n + 3}$

Déterminer les limites éventuelles de la suite (U_n).

Si (U_n) admet une limite l, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

En passant à la limite dans l'expression de U_{n+1}, nous obtenons :

$l = \frac{9l + 7}{l + 3}$

Ceci nous donne encore :

$l(l + 3) = 9l + 7 \Leftrightarrow l^2 + 3l - 9l - 7 = 0$

$\Leftrightarrow l^2 - 6l - 7 = 0$

Nous résolvons cette équation du 2nd degré avec la méthode du discriminant :

$\Delta = 64 > 0$

Donc $l_1 = -1$ et $l_2 = 7$

Donc $l^2 - 6l - 7 = (l + 1)(l - 7)$

Et les limites possibles sont donc – 1 et 7.

Conclusion : Les limites éventuelles de (U_n) sont -1 et 7.