Etude de fonction S

Enoncés des problèmes résolus dans cette vidéo :

Problème 1

f(x) = $\frac{e^{2x}-1}{2e^{x}}$ Df = R

1) Montrer que f(x) peut se mettre sous la forme $\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

2) Etudier les variations de f.

3) Déterminer l'équation T_0 de la tangente à Cf en 0.

4) Soit d(x) = f(x) – x. Montrer que d'(x) = $\frac{(e^{x}-1)^2}{2e^{x}}$

5) Calculer d(0) et en déduire les positions relatives de Cf et T_0.

6) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

7) Tracer T_0 puis une allure de Cf.

Problèmes complémentaires suivis de leur correction :

Problème 2

f(x) = $\frac{(10+2x)e^{3x}+e^{4x}+e^{2x}}{5e^{3x}}$ Df = R

1) Montrer que f(x) peut se mettre sous la forme $\frac{10+2x+e^{x}+e^{-x}}{5}$

2) Etudier les variations de f. On pourra mettre la dérivée sous forme d'un polynôme en e^{-x}.

3) Déterminer l'équation T_0 de la tangente à Cf en 0.

4) Soit d(x) = f(x) – ($\frac{1}{5}$x + $\frac{1}{5}$). Calculer d'(x).

5) Calculer d(0) et en déduire les positions relatives de Cf et T_0.

6) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

7) Tracer T_0 puis une allure de Cf.

Problème 3

f(x) = $\dfrac{xe^{-x} + 1 + (x+1)e^{x} + e^{2x} + e^{3x}}{3(e^{x} + e^{-x})}$ Df = R

1) Montrer que f(x) peut se mettre sous la forme $\dfrac{x + e^{x} + e^{2x}}{3}$

2) Etudier les variations de f.

3) Déterminer l'équation T_0 de la tangente à Cf en 0.

4) Soit d(x) = f(x) – ($\frac{4}{3}$ x + $\frac{2}{3}$). Calculer d'(x).

5) Calculer d(0) et en déduire les positions relatives de Cf et T_0.

6) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

7) Tracer T_0 puis une allure de Cf.

Correction Problème 2

f(x) = $\dfrac{(10 + 2x)e^{3x} + e^{4x} + e^{2x}}{5e^{3x}}$ Df = R

1) Montrer que f(x) peut se mettre sous la forme $\dfrac{10 - 2x - e^{x} + e^{-x}}{5}$

Nous remarquons que pour passer d'une forme à l'autre, il suffit de multiplier ou de diviser par e^{3x} :

f(x) = $\dfrac{(10-2x)e^{3x}-e^{4x}+e^{2x}}{5e^{3x}} = \dfrac{e^{3x}(-2x+10-e^{x}+e^{-x})}{5e^{3x}} = \dfrac{10-2x-e^{x}+e^{-x}}{5}$

Donc nous avons bien f(x) = $\dfrac{10-2x-e^{x}+e^{-x}}{5}$

2) Etudier les variations de f. On pourra mettre la dérivée sous forme d'un polynôme en e^{-x}.

f est dérivable sur son ensemble de définition. Nous utiliserons la seconde forme pour dériver f car nous n'aurons qu'à dériver une somme (au lieu d'un quotient si nous utilisons la première forme) :

$f'(x) = \frac{1}{5}(-2 - e^{x} - e^{-x})$

On factorise par $-e^{x}$ afin d'obtenir un polynôme en e^{-x} :

$f'(x) = -\frac{e^{x}}{5}(e^{-2x} + 2e^{-x} + 1)$

On reconnait une identité remarquable en e^{-x} :

$f'(x) = -\frac{e^{x}}{5}((e^{-x})^{2} + 2e^{-x} + 1) = -\frac{e^{x}}{5}(e^{-x} + 1)^{2}$

$-\frac{e^{x}}{5}$ ne s'annule jamais et est strictement négatif puisque e^{x} est strictement positive du R.

$(e^{-x} + 1)^{2}$ est la somme de deux termes strictement positif, au carré, donc est strictement positif.

Par conséquent $f'(x) < 0$ sur R.

Donc f est décroissante sur R.

3) Déterminer l'équation T_0 de la tangente à Cf en 0.

Nous rappelons la formule permettant de calculer la tangente en 0 pour une fonction f donnée :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

D'après la question 2) $f'(0) = -\frac{4}{5}$ et $f(0) = 2$

Par conséquent, l'équation de la tangente à Cf en 0 est $y = -\frac{4}{5}x + 2$

4) Soit d(x) = f(x) – $(-\frac{4}{5}x + 2)$. Calculer d'(x).

$$d(x) = \frac{10 - 2x - e^{x} + e^{-x}}{5} - \left(-\frac{4}{5}x + 2\right) = \frac{10 - 2x - e^{x} + e^{-x} + 4x - 10}{5} = \frac{2x - e^{x} + e^{-x}}{5}$$

Nous avons donc

$$d'(x) = \frac{1}{5}(2 - e^{x} - e^{-x})$$

De même qu'à la question 3), on pourra montrer que $d'(x) = -\frac{e^{x}}{5}(e^{-x} - 1)^{2}$

5) Calculer d(0) et en déduire les positions relatives de Cf et T_0.

d(0) = f(0) – y(0) = 2 – 2 = 0

De même que nous avons montré à la question 3) que f' est strictement négative sur R, nous montrons que d' est négative ou nulle sur R et s'annule en x = 0 (seule solution de $e^{-x} - 1 = 0$).

Ceci nous permet de dresser le tableau de variation de d :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de d'		$-$	
Variations de d	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

Ainsi d est positive pour x ∈]$-\infty$;0] et négative pour x ∈ [0 ; $+\infty$ [

Conclusion : Cf est au-dessus de sa tangente sur]$-\infty$;0] et est en-dessous sur [0 ; $+\infty$ [.

6) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Nous utilisons à nouveau la seconde forme de f pour le calcul des limites car la première conduit à une forme indéterminée.

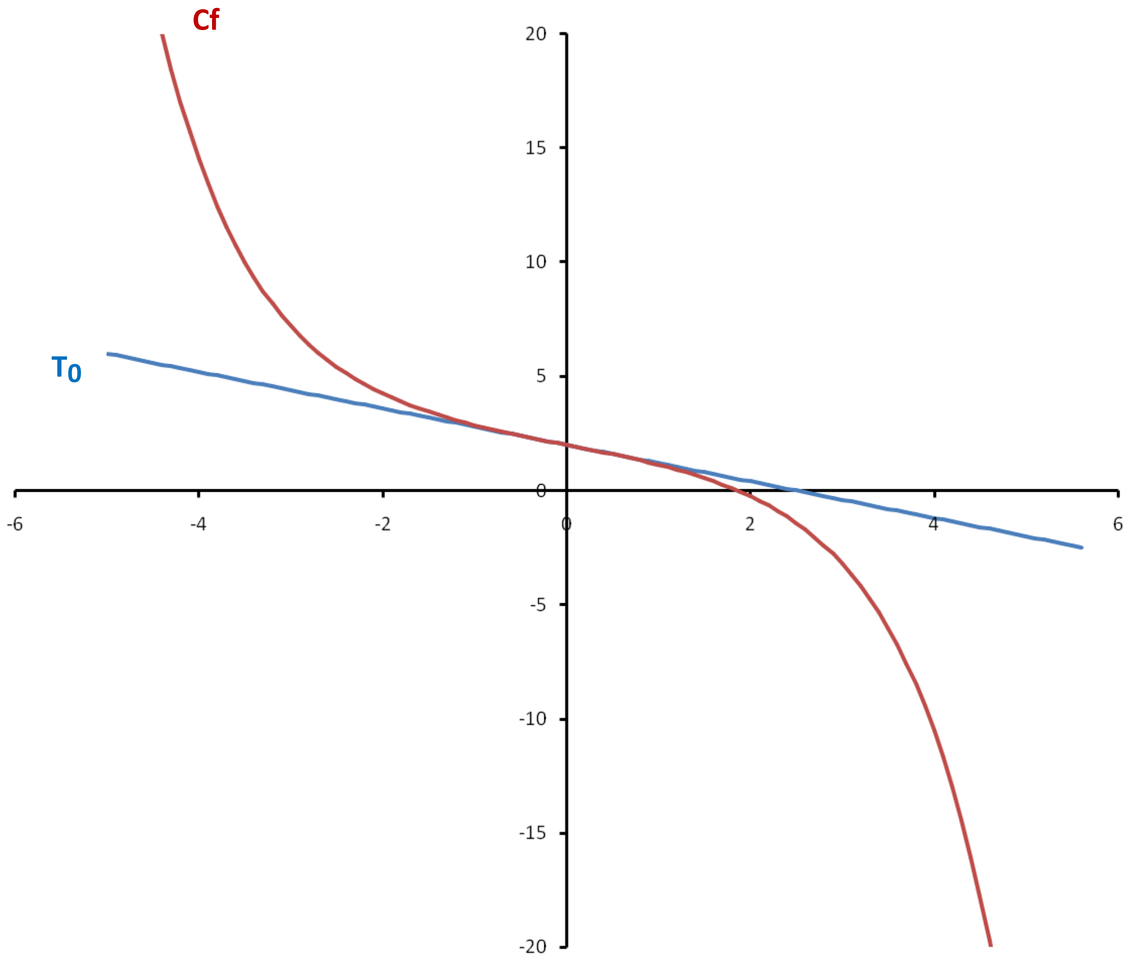
Quand $x \to +\infty$
$$\begin{cases} e^{-x} \to 0 \\ \dfrac{10-2x-e^{x}}{5} \to -\infty \text{ par somme} \\ \dfrac{10-2x-e^{x}+e^{-x}}{5} \to -\infty \text{ par somme} \end{cases}$$

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Quand $x \to -\infty$
$$\begin{cases} -2x+e^{-x} = e^{-x}(1-2x\,e^{x}) \to +\infty \text{ par croissances comparées} \\ \dfrac{10-e^{x}}{5} \to 0 \text{ par somme} \\ \dfrac{10-2x-e^{x}+e^{-x}}{5} \to +\infty \text{ par somme} \end{cases}$$

Conclusion : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

7) Tracer T_0 puis une allure de Cf.



Correction Problème 3

f(x) = $\dfrac{xe^{-x} + 1 + (x+1)e^{x} + e^{2x} + e^{3x}}{3(e^{x} + e^{-x})}$ Df = R

1) Montrer que f(x) peut se mettre sous la forme $\dfrac{x + e^{x} + e^{2x}}{3}$

Le passage d'une expression à l'autre se fait en multipliant ou en divisant par $e^{x} + e^{-x}$.

En effet :

f(x) = $\dfrac{xe^{-x} + 1 + (x+1)e^{x} + e^{2x} + e^{3x}}{3(e^{x} + e^{-x})} = \dfrac{xe^{-x} + 1 + e^{x} + xe^{x} + e^{2x} + e^{3x}}{3(e^{x} + e^{-x})} =$

$\dfrac{e^{-x}(x + e^{x} + e^{2x}) + e^{x}(x + e^{x} + e^{2x})}{3(e^{x} + e^{-x})} = \dfrac{\cancel{(e^{-x} + e^{x})}(x + e^{x} + e^{2x})}{3\cancel{(e^{x} + e^{-x})}} = \dfrac{x + e^{x} + e^{2x}}{3}$

Conclusion : f(x) = $\frac{xe^{-x}+1+(x+1)e^{x}+e^{2x}+e^{3x}}{3(e^{x}+e^{-x})} = \frac{x+e^{x}+e^{2x}}{3}$

2) Etudier les variations de f.

f est dérivable sur son ensemble de définition. Nous utiliserons la seconde forme pour dériver f car nous n'aurons qu'à dériver une somme (au lieu d'un quotient si nous utilisons la première forme) :

f'(x) = $\frac{1+e^{x}+2e^{2x}}{3}$

Le numérateur et le dénominateur de f' sont strictement positifs donc f' est strictement positive sur Df.

f est donc strictement croissante sur Df.

3) Déterminer l'équation T_0 de la tangente à Cf en 0.

Nous rappelons la formule permettant de calculer la tangente en 0 pour une fonction f donnée :

y = f'(0) (x – 0) + f(0)

D'après la question 2) f'(0) = $\frac{4}{3}$ et f(0) = $\frac{2}{3}$

Donc l'équation de T_0 est y = $\frac{4}{3}$x + $\frac{2}{3}$

4) Soit d(x) = f(x) – ($\frac{4}{3}$x + $\frac{2}{3}$). Calculer d'(x).

Nous utilisons à nouveau la seconde forme de f dans cette question (, elle nous simplifiera grandement les calculs) :

d(x) = $\frac{x+e^{x}+e^{2x}}{3} - (\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}) = \frac{-3x-2+e^{x}+e^{2x}}{3}$

d' est dérivable sur l'ensemble Df

Donc d'(x) = $\frac{-3+e^{x}+2e^{2x}}{3}$

5) Calculer d(0) et en déduire les positions relatives de Cf et T_0.

d(0) = 0 (bien évidemment puisque T_0 est la tangente à f en 0.)

Pour donner les positions relatives de Cf et T_0, nous avons besoin de connaître le signe de d'. De prime abord, celui-ci ne nous est pas accessible. Nous allons donc devoir dériver d une seconde fois, afin de l'obtenir.

d' est dérivable sur Df

et d''(x) = $\dfrac{e^x + 2e^{2x}}{3} > 0$ sur Df.

Ceci nous permet de dresser le tableau de variation et de d' duquel on pourra déduire les variations de d et donc son signe :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
Signe de d''				+			
Variations de d'	-3	↗	0	↗		↗	$+\infty$
Signe de d'		-	0		+		
Variations de d		↘	d(α)	↗	0	↗	
Signe de d							

6) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

7) Tracer T_0 puis une allure de Cf.