# Limites de quotients

## Enoncé des problèmes résolus dans cette vidéo :

**Problème 1**

h(x) = $\frac{x^2-x+4}{x-3}$

1) Montrer qu'il existe a, b et c tels que h(x) = ax + b + $\frac{c}{x-3}$

2) Déterminer les limites de h(x) aux bornes de l'ensemble de définition.

3) Etudier la limite de h(x) – (x + 2) en +∞ et en - ∞.

Proposer une interprétation de ce résultat.

4) Notons (D) la droite d'équation y = x + 2

Etudier la position relative de Ch par rapport à (D).

5) Tracer une allure de la courbe de h.

## Exercices complémentaires suivis de leur corrigé :

**Problème 2**

f(x) = $\frac{3x^2-2x-5}{x+2}$

1) Montrer qu'il existe a, b et c tels que f(x) = ax + b + $\frac{c}{x+2}$

2) Déterminer les limites de f(x) aux bornes de l'ensemble de définition.

3) Etudier la limite de f(x) – (3x - 8) en +∞ et en - ∞.

Proposer une interprétation de ce résultat.

4) Notons (D) la droite d'équation y = 3x - 8

Etudier la position relative de Cf par rapport à (D).

5) Tracer une allure de la courbe de f.

**Problème 3**

g(x) = $\dfrac{4x-7}{5x-1}$

1) Déterminer les limites de g(x) aux bornes de l'ensemble de définition. Proposer une interprétation des résultats obtenus.

2) Notons (D) la droite d'équation y = $\dfrac{4}{5}$

Etudier la position relative de Cg par rapport à (D).

3) Tracer une allure de la courbe de g.

---

**Correction Problème 2**

f(x) = $\dfrac{3x^2-2x-5}{x+2}$

1) Montrer qu'il existe a, b et c tels que f(x) = ax + b + $\dfrac{c}{x+2}$

Nous mettons l'expression ci-dessus au même dénominateur :

f(x) = $\dfrac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \dfrac{ax^2+(b+2a)x+2b+c}{x+2}$

Nous identifions les coefficients devant les termes de même puissance avec l'expression de f donnée dans l'énoncé. Ceci nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} a = 3 \\ b + 2a = -2 \\ 2b + c = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -8 \\ c = 11 \end{cases}$$

D'où f(x) = 3x – 8 + $\dfrac{11}{x+2}$

2) Déterminer les limites de f(x) aux bornes de l'ensemble de définition.

f n'est pas définie en – 2 donc son ensemble de définition est Df = $]-\infty; \ -2[\cup]-2\ ; \ +\infty[$.

Pour le calcul des limites, nous allons utiliser l'expression de f trouvée à la question 1).

<u>En $+\infty$ et $-\infty$ :</u>

$$\text{Quand } x \to -\infty \quad \begin{cases} \dfrac{11}{x+2} \to 0 \text{ par quotient} \\ 3x-8 \to -\infty \text{ par somme} \\ 3x-8+\dfrac{11}{x+2} \to -\infty \text{ par somme} \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

De même, on montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

<u>En – 2 :</u>

$$\text{Quand } x \overset{<}{\to} -2 \quad \begin{cases} 3x+8 \to 2 \text{ par somme} \\ x+2 \to 0^{-} \text{ par somme} \\ \dfrac{11}{x+2} \to -\infty \text{ par quotient} \\ 3x-8+\dfrac{11}{x+2} \to -\infty \text{ par somme} \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = -\infty$

On montre de la même façon que $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = +\infty$ nous indiquent que f admet une asymptote verticale d'équation x = - 2.

3) Etudier la limite de f(x) – (3x - 8) en +∞ et en - ∞. Proposer une interprétation de ce résultat.

D'après la question 1), f(x) – (3x – 8) = $\frac{11}{x+2}$

Or nous avons montré dans la question 2) que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{11}{x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{11}{x+2}$ = 0

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty}$ f(x) – (3x – 8) = 0 et $\lim\limits_{x \to +\infty}$ f(x) – (3x – 8) = 0

Ceci signifie que la courbe Cf se rapproche de plus en plus de la droite d'équation

y = 3x – 8 quand x tend vers +∞ ou - ∞.

Cf admet donc pour asymptote oblique la droite d'équation y = 3x – 8.

4) Notons (D) la droite d'équation y = 3x – 8. Etudier la position relative de Cf par rapport à (D).

La position relative de Cf par rapport à (D) sur Df, nous est donnée par le signe de f(x) – (3x – 8) .

D'après la question 1), f(x) – (3x – 8) = $\frac{11}{x+2}$

donc nous étudions le signe de $\frac{11}{x+2}$ , qui est du signe de x + 2.

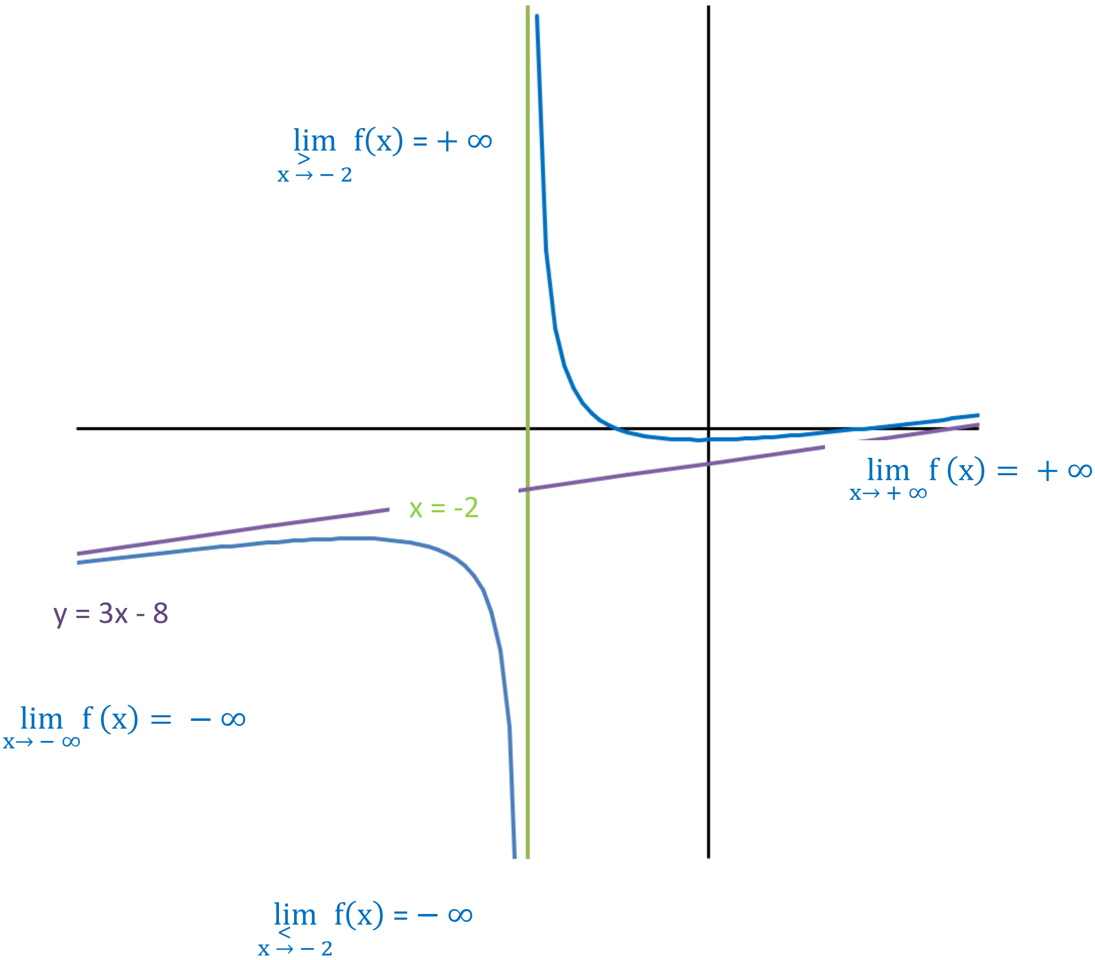
Voici le tableau de signe de x + 2 :

| x | $-\infty$ | - 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| signe de x + 2 | - | 0 | + |

Ainsi f(x) – (3x – 8) est positif pour x ∈ $]-2\,;\ +\infty[$ et négatif pour x ∈ $]-\infty;\ -2[$.

Ceci signifie encore que Cf est au-dessus de (D) sur $]-2\,;\,+\infty[$ et est en dessous de (D) sur $]-\infty;\,-2[$.

5) Tracer une allure de la courbe de f.



**Correction Problème 3**

g(x) = $\dfrac{4x-7}{5x-1}$

1) Déterminer les limites de g(x) aux bornes de l'ensemble de définition. Proposer une interprétation des résultats obtenus.

g n'est pas définie en $\frac{1}{5}$ donc son ensemble de définition est Dg = $]-\infty; \frac{1}{5}[\cup]\frac{1}{5}\ ;\ +\infty[$.

<u>En $+\infty$ et $-\infty$ :</u>

Pour le calcul des limites, en $+\infty$ et $-\infty$ nous devons factoriser l'expression de f par le terme dominant car la limite est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

g(x) = $\dfrac{x(4-\frac{7}{x})}{x(5-\frac{1}{x})} = \dfrac{4-\frac{7}{x}}{5-\frac{1}{x}}$

Quand $x \to -\infty$ $\begin{cases} 4 - \frac{7}{x} \to 4 \text{ par somme} \\ 5 - \frac{1}{x} \to 5 \text{ par somme} \\ \dfrac{4-\frac{7}{x}}{5-\frac{1}{x}} \to \frac{4}{5} \text{ par quotient} \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \frac{4}{5}$

De même, on montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{4}{5}$

Ceci nous montre que Cg admet une asymptote horizontale d'équation y = $\frac{4}{5}$ en $+\infty$ et $-\infty$.

En 1/5 :

Quand $x \overset{<}{\rightarrow} \frac{1}{5}$ $\left\{\begin{array}{l} 4x - 7 \rightarrow -\frac{31}{5} \text{ par somme} \\ 5x - 1 \rightarrow 0^- \text{ par somme} \\ \frac{4x-7}{5x-1} \rightarrow +\infty \text{ par quotient} \end{array}\right.$

Donc $\lim\limits_{x \overset{<}{\rightarrow} \frac{1}{5}} g(x) = +\infty$

On montre de la même façon que $\lim\limits_{x \overset{>}{\rightarrow} \frac{1}{5}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\rightarrow} \frac{1}{5}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \overset{>}{\rightarrow} \frac{1}{5}} f(x) = -\infty$ nous indique que f admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{5}$.

2) Notons (D) la droite d'équation $y = \frac{4}{5}$. Etudier la position relative de Cg par rapport à (D).

La position relative de Cg par rapport à (D) sur Dg, nous est donnée par le signe de $g(x) - \frac{4}{5}$.

$g(x) - \frac{4}{5} = \frac{4x-7}{5x-1} - \frac{4}{5} = \frac{5(4x-7) - 4(5x-1)}{5(5x-1)} = -\frac{31}{25x-5}$

donc nous étudions le signe de $-\frac{31}{25x-5}$, qui est du signe opposé de $25x - 5$, puisque $-31$ est négatif.

Voici le tableau de signe de $25x - 5$:

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{5}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| signe de $25x - 5$ | - | 0 | + |

Ainsi $g(x) - \frac{4}{5}$ est positif pour $x \in ]-\infty; \frac{1}{5}[$ et négatif pour $x \in ]\frac{1}{5}; +\infty[$

Ceci signifie encore que Cg est au-dessus de (D) sur $]-\infty; \frac{1}{5}[$ et est en dessous de (D) sur $]\frac{1}{5}; +\infty[$.

3) Tracer une allure de la courbe de g.