Limites de quotients

Enoncé des problèmes résolus dans cette vidéo :

Exercice 1

1) Déterminer les limites aux bornes de f(x) = $\frac{2x-1}{x-3}$

Interpréter ces limites.

Proposer une allure de la courbe cohérente avec ces limites.

2) Même questions pour g(x) = $\frac{-2}{(x+1)^2}$

Exercices complémentaires suivis de leur corrigé :

Exercice 2

1) Déterminer les limites aux bornes de f(x) = $\frac{3x+4}{x+5}$

Interpréter ces limites.

Proposer une allure de la courbe cohérente avec ces limites.

2) Même questions pour g(x) = $\frac{8}{(x+3)(x-7)}$

Correction Exercice 2

1)

- Déterminer les limites aux bornes de f(x) = $\frac{3x+4}{x+5}$

La fonction f n'est pas définie en -5 donc son ensemble de définition est Df = $]-\infty\,;-5[\,\cup\,]-5\,;+\infty[$.

Nous avons donc 4 limites à déterminer.

En $+\infty$ et $-\infty$:

En $+\infty$ et $-\infty$, la fonction f prend une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$, qu'il convient de lever en factorisant numérateur et dénominateur par le terme dominant :

$$f(x) = \frac{x\,(3+\frac{4}{x})}{x(1+\frac{5}{x})} = \frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{5}{x}}$$

Nous pouvons traiter simultanément les limites en $+\infty$ et $-\infty$, puisque

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$

$$\text{Quand } x \to \pm\infty \quad \begin{cases} 3 + \frac{4}{x} \to 3 \text{ par somme} \\ 1 + \frac{5}{x} \to 1 \text{ par somme} \\ \frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{5}{x}} \to 3 \text{ par quotient} \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

En – 5 :

$$\text{Quand } x \overset{<}{\to} -5 \quad \begin{cases} 3x+4 \to -11 \text{ par somme} \\ x+5 \to 0^- \text{ par somme} \\ \frac{3x+4}{x+5} \to +\infty \text{ par quotient} \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ <}} f(x) = +\infty$

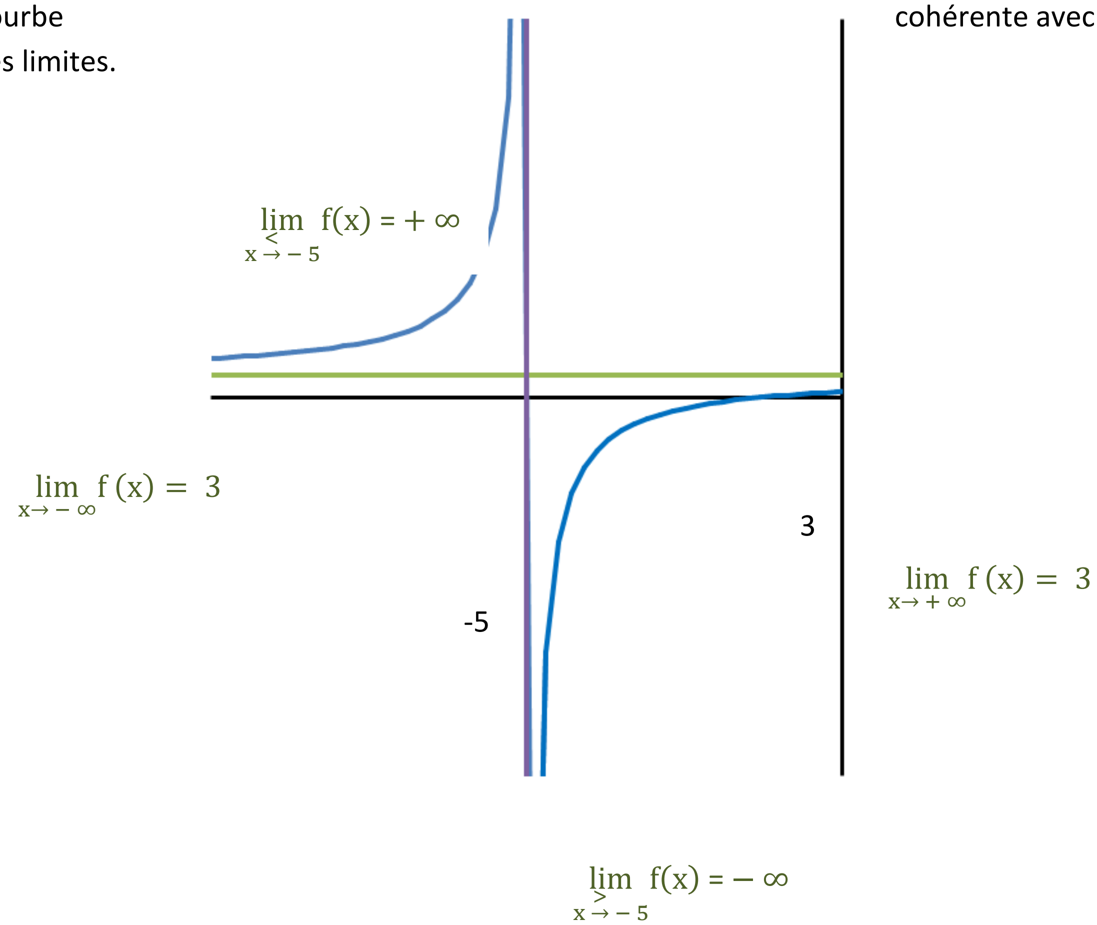
De même, on montre que $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ >}} f(x) = -\infty$

- Interpréter ces limites.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ nous indique que la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation y = 3 en $+\infty$ et $-\infty$.

  $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ >}} f(x) = -\infty$ nous indique que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation x = - 5.

- Proposer une allure de la courbe cohérente avec ces limites.



2)

- Déterminer les limites aux bornes de g(x) = $\frac{8}{(x+3)(x-7)}$

La fonction g n'est pas définie en – 3 et en 7. Par conséquent son ensemble de définition est le suivant : Dg =]$-\infty$; - 3 [∪] – 3 ; 7[∪] 7 ;$+\infty$[.

Il y a donc 6 limites à calculer.

En $+\infty$ et $-\infty$:

Quand x $\rightarrow \pm\infty$ $\begin{cases} x+3 \rightarrow \pm\infty \\ x-7 \rightarrow \pm\infty \\ \frac{8}{(x+3)(x-7)} \rightarrow 0 \text{ par quotient} \end{cases}$

Donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$

En – 3 :

Quand x $\overset{<}{\rightarrow} -3$ $\begin{cases} x-7 \rightarrow -10 \text{ par somme} \\ x+3 \rightarrow 0^- \text{ par somme} \\ \frac{8}{(x+3)(x-7)} \rightarrow +\infty \text{ par quotient} \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = +\infty$

De même, on montre que $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = -\infty$

En 7 :

$$\text{Quand } x \overset{<}{\to} 7 \quad \left\{ \begin{array}{l} x - 7 \to 0^- \text{ par somme} \\ x + 3 \to 10 \text{ par somme} \\ \dfrac{8}{(x+3)(x-7)} \to -\infty \text{ par quotient} \end{array} \right.$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ <}} f(x) = -\infty$

De même, on montre que $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ >}} f(x) = +\infty$

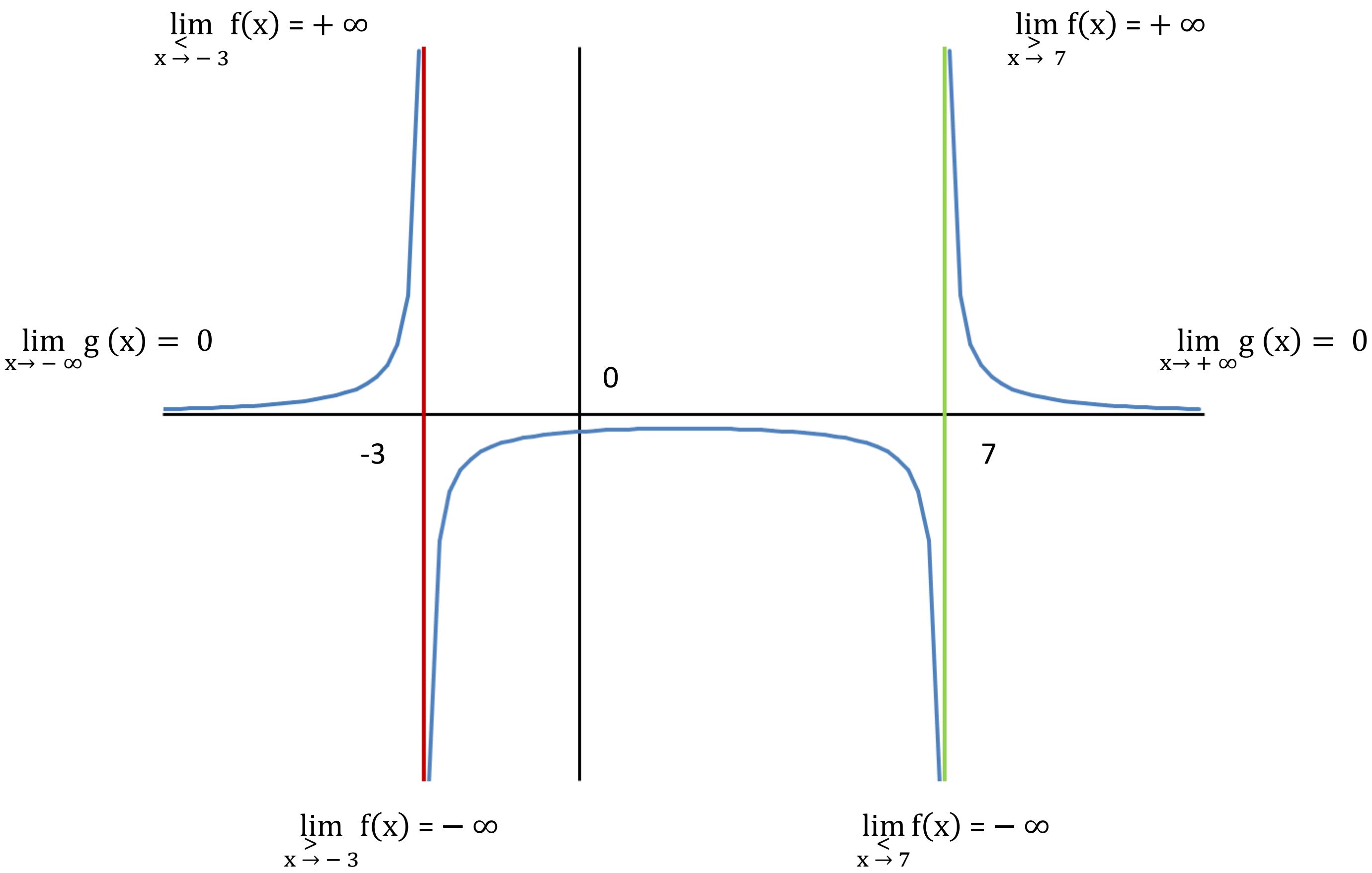
- Interpréter ces limites.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ nous indique que la courbe de g admet une asymptote horizontale d'équation y = 0 en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = -\infty$ nous indique que la courbe admet une asymptote verticale d'équation x = - 3.

$\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ >}} f(x) = +\infty$ nous indique que la courbe admet une asymptote verticale d'équation x = 7.

- Proposer une allure de la courbe cohérente avec ces limites.


$\lim_{x \overset{<}{\to} -3} f(x) = +\infty$
$\lim_{x \overset{>}{\to} 7} f(x) = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$
$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$
0
-3
7
$\lim_{x \overset{>}{\to} -3} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \overset{<}{\to} 7} f(x) = -\infty$