Suite 1

Etude d'une suite géométrique

Enoncé du problèmes résolu dans cette vidéo:

Problème 1

Un cinéma est en crise. On estime à 6% la baisse de fréquentation d'un mois sur l'autre. En janvier, on comptait U_1=6700 spectateurs.

1) Justifier qu'on peut modéliser le nombre de spectateurs par une suite (U_n) géométrique.

2) Donner une définition de cette suite par récurrence.

3) Calculer la fréquentation en février et mars U_2 et U_3.

4) Proposer une définition explicite pour (U_n), c'est-à-dire une expression de U_n en fonction de n.

5) Calculer le nombre total de spectateurs attendu cette année là, selon cette estimation.

6) Le cinéma sera déficitaire si la fréquentation devient inférieure à 4000 spectateurs par mois. Si la tendance persiste au même rythme, à partir de quand le cinéma sera-t-il déficitaire ?

Problèmes complémentaires suivis de leur correction

Problème 2

Vous venez de toucher un héritage de 10 000 euros. Vous en profitez pour partir en voyage dans le pays de vos rêves. Ce voyage vous coûtera 2800 euros. Vous décidez de placer le reste de cet argent sur un compte épargne dont le taux d'intérêt s'élève à 2% par an. Le premier placement est réalisé au 1er Janvier 2015.

1) Justifier que le montant de votre argent placé peut-être modélisé par une suite géométrique (U_n) dont on donnera le premier terme U_0.

2) Donner une définition par récurrence de cette suite.

3) Calculer le montant de votre compte d'épargne aux 1er Janvier 2017 et 2019, U_2 et U_4. (On arrondira au centime si nécessaire).

4) Donner une définition explicite de la suite U_n, c'est-à-dire une expression en fonction de n.

5) A partir de quand aurez-vous remboursé le prix de votre voyage grâce aux intérêts de votre épargne ?

Problème 3

Un homme souhaite se lancer dans l'élevage de lapins. Pour simplifier notre problème, nous supposerons qu'il y a une proportion égale de mâles et de femelles et que les lapins se mettent tous en couple . Ils auront en moyenne 6 lapins dans l'année, avant d'être mangé…

Au mois de Janvier 1954, l'éleveur de lapins achète un couple de lapins. A l'issue de la première année, ceux-ci se seront reproduits, avant de laisser place à la nouvelle génération. Il possède donc en janvier 1955 3 couples de jeunes lapins, soit 6 lapins qui à leur tour se reproduiront etc…

1) Justifier que l'on peut modéliser le nombre de lapins à l'aide d'une suite géométrique (V_n) dont le premier terme est $V_0=2$.

2) Donner une définition par récurrence de cette suite.

3) Combien l'éleveur possèdera-t-il de lapins à la fin de l'année 1960, c'est-à-dire que vaut V_6 ?

4) Donner une définition explicite de la suite V_n, c'est-à-dire une expression en fonction de n.

5) L'éleveur souhaite évaluer les coûts en nourriture qu'il devra débourser pour ses lapins sur les 10 années à venir. Pour cela, il a besoin de connaitre le nombre total de lapins qu'il devra nourrir.

6) Pour des raisons de place, l'éleveur ne peut accueillir plus de 10 000 lapins. Donner l'année à l'issue de laquelle l'éleveur possèdera ces 10 000 lapins.

Correction Problème 2

1)

Au 1er Janvier 2015, vous placez un montant fixe sur un compte en banque. Au 1er Janvier 2016, vous aurez récupéré ce montant + 2% de ce montant, c'est-à-dire 102% du montant placé en 2015. En 2017, vous aurez le montant de l'année 2016 + 2% de ce montant, c'est-à-dire 102% du montant du 1er Janvier 2016, ou encore le montant du 1er Janvier 2016 x 1,02 etc.

On remarque donc que pour calculer le montant de l'année suivante, il nous faut multiplier le montant de l'année précédente par 1,02. (pour les ES la formule de cours 1 + t/100 vous donne directement ce résultat).

Le premier terme est le montant placé en 2015, à savoir 10 000 - 2800=7200

2)

D'après 1), nous pouvons donc modéliser le montant annuel du compte d'épargne par une suite de raison 1,02 et de premier terme $U_0 = 7200$.

Ainsi, la suite (U_n) peut-être définie comme suit :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n \times 1{,}02 \\ U_0 = 7200 \end{cases}$$

3)

Le tableau ci-dessous donne les 5 premiers termes de la suite (U_n) :

n	**Un**
0	7200
1	7344
2	7490.88
3	7640.6976
4	7793.51155

Au premier Janvier 2017, il y aura donc U_2 = 7344 euros et au premier Janvier 2019, il y aura U_4 = 7793.51 euros sur le compte d'épargne.

4)

Nous connaissons la raison et le premier terme de la suite (U_n), par conséquent nous pouvons en donner une expression explicite :

$U_n = 7200 \times (1{,}02)^n$

5)

Votre voyage est remboursé dès lors que vous avez à nouveau 10 000 euros sur votre compte en banque. Pour connaitre l'année n à partir de laquelle ce sera le cas, il suffit de résoudre :

$U_n = 7200 \times 1{,}02^n \geq 10000$

Càd $1{,}02^n \geq \frac{10000}{7200}$.

En passant par le logarithme, ceci nous donne :

$n \geq \frac{\ln(\frac{10000}{7200})}{\ln(1{,}02)}$

Càd $n \geq 16{,}29$.

Il faudra donc attendre 17 ans pour voir le voyage remboursé par les intérêts de notre placement.

Correction Problème 3

1)

A l'issue de chaque nouvelle année, le nombre de jeunes lapins est égal au nombre d'anciens lapins divisé par deux (puisque les lapins se reproduisent en couple) et multiplié par 6 (puisque chaque couple a 6 lapins par an).

On obtient ainsi le nouveau nombre de lapins en multipliant l'ancien par 3 = 6/2.

2)

D'après la question 1), le nombre de lapins peut être modélisé à l'aide d'une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 2.

Sa définition par récurrence est donc :

$$\begin{cases} V_{n+1} = 3V_n \\ V_0 = 2. \end{cases}$$

3)

V_0 correspond à l'année 1954 donc l'année 1960 correspondra à V_6

Le tableau ci-dessous nous donne les premiers termes de la suite (V_n) jusquà V_6

n	**Vn**
0	2
1	6
2	18
3	54
4	162
5	486
6	1458

Au premier janvier1960 l'éleveurs possèdera 1458 lapins.

4)

Comme (V_n) est une suite géométrique de raison 3 et de terme initial $V_0 = 2$, son expression explicite est la suivante :

$V_n = 2 \times 3^n$

5)

L'éleveur doit sommer le nombre total de lapins qu'il aura à nourrir durant 10 ans. Il doit donc calculer $S = V_0 + V_2 + \ldots + V_9$.

On utilise la formule du cours:

$$S = V_0 \frac{1-q^{10}}{1-q}$$

Où $q = 3$, $V_0 = 2$ et 10 le nombre de termes que l'on somme.

$$\text{Ainsi } S = 2 \frac{1-3^{10}}{1-3} = \frac{2}{2}(3^{10}-1) = 3^{10}-1$$

Donc $S = (3^{10} - 1) = 59048$

L'éleveur doit donc prévoir un budget environ égal à 60 000 fois le budget nécessaire pour nourrir un lapin pendant un an.

6)

Afin de savoir à partir de quand l'éleveur possèdera plus de 10 000, il nous faut résoudre

$V_n \geq 10000$.

Cela nous donne :

$2 \times 3^n \geq 10\,000$

$$\text{Càd } n \geq \frac{\ln(\frac{10000}{2})}{\ln 3}$$

Ou encore $n \geq 7,75$.

A l'issue de la 8ème année l'éleveur aura dépassé son quota de 10 000 lapins.