Equations et Inéquations

Enoncés des problèmes résolus dans cette vidéo :

Exercice 1

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

- $e^{x} = 5$
- $2e^{(2x + 5)} = 7$
- $e^{5x} + 6 = -7$
- $e^{(x + 3)} > 2$
- $\frac{e^{x}}{e^{3}} > e^{x^2} e^{5}$
- $e^{2x} + 2e^{x} + 1 = 0$

Exercice complémentaire suivi de sa correction :

Exercice 2

Résoudre les équations ou inéquations suivantes:

- $e^{3x} + 3 = -3$
- $5e^{x^2-6} = 8$
- $e^{5x}(1 - 6e^{2x}) = 0$
- $e^{(2x - 7)} < 5$

- $e^{2x} + 3e^{x} - 4 = 0$
- $\frac{e^{5x}}{e^{3}} > e^{x^2} e^{-9}$

Correction Exercice 2

- $e^{3x} - 3 = -3$

  Nous commençons par isoler l'exponentielle:
  $e^{3x} = -6$
  L'exponentielle est toujours positive donc elle ne peut être égale à – 6.

  Conclusion : l'équation n'a pas de solution.

- $5e^{x^2-6} = 8$

  Nous isolons l'exponentielle en divisant par 5 des deux côtés de l'égalité :
  $e^{x^2-6} = \frac{8}{5}$
  Puis nous appliquons le logarithme népérien pour faire disparaitre l'exponentielle:
  $x^2 - 6 = \ln(\frac{8}{5})$
  $x^2 = \ln(\frac{8}{5}) + 6$
  Donc x = $-\sqrt{\ln\left(\frac{8}{5}\right) + 6}$ ou bien x = $\sqrt{\ln\left(\frac{8}{5}\right) + 6}$

- Conclusion : Les solutions de l'équation $5e^{x^2-6} = 8$ sont S = $\{ -\sqrt{\ln\left(\frac{8}{5}\right) + 6}$; $\sqrt{\ln\left(\frac{8}{5}\right) + 6}\ \}$

- $e^{5x}(1 - 6e^{2x}) = 0$

  (L'idée ici est de ne pas prendre peur devant les exponentielles et de résoudre cette équation comme s'il s'était agi d'une équation en x :)

$e^{5x}(1 - 6e^{2x}) = 0$

signifie que : $e^{5x} = 0$ ou bien $1 - 6e^{2x} = 0$

Or exponentielle est strictement positive sur R donc il est impossible que $e^{5x} = 0$

Donc $1 - 6e^{2x} = 0$

Càd $6e^{2x} = 1$

On isole à présent l'exponentielle puis on passe au logarithme de chaque côté de l'égalité :

$e^{2x} = \frac{1}{6}$

$2x = \ln(\frac{1}{6})$

Donc $x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{6})$

Conclusion : L'équation admet pour unique solution $x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{6}) = -\frac{\ln 6}{2}$

- $e^{(2x - 7)} < 5$

Nous appliquons le logarithme de part et d'autre de l'inéquation :

$2x - 7 < \ln 5$

$2x < \ln 5 + 7$

$x < \frac{\ln 5 + 7}{2}$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $]-\infty \, ; \frac{\ln 5 + 7}{2}[$.

- $e^{2x} + 3e^{x} - 4 = 0$

Nous reconnaissons un polynôme en e^{x} et posons $x = e^{x}$:

$x^2 + 3x - 4 = 0$

Nous résolvons ce polynôme du 2nd degré en x à l'aide de la méthode du discriminant.

Son discriminant vaut 25 > 0 donc il admet deux solutions $x_1 = -4$ et $x_2 = 1$

Nous avons à présent deux nouvelles équations en exponentielle : $e^x = -4$ et $e^x = 1$

Nous avons déjà vu que exponentielle est strictement positive donc seule la seconde équation admet une solution :

$e^x = 1$ nous donne $x = \ln 1 = 0$

Conclusion : l'équation admet une unique solution x = 0.

- $\dfrac{e^{5x}}{e^3} > e^{-x^2} e^{-9}$

  Nous utilisons les propriétés de l'exponentielle pour résoudre cette inéquation :

  $$\frac{e^{5x}}{e^3 e^{-x^2} e^{-9}} > 1$$

  Ceci nous donne encore : $e^{5x - 3 + 9 + x^2} > 1$

  Nous passons au logarithme à gauche et à droite tout en simplifiant l'expression se trouvant dans l'exponentielle du membre de gauche :

  $x^2 + 5x + 6 = \ln 1 > 0$

  Nous résolvons cette inéquation à l'aide de la méthode du discriminant. Le discriminant vaut 1 et les racines du polynôme valent : $x_1 = -3$ et $x_2 = -2$.

  Le tableau de signe ci-dessous nous permet de conclure quant aux solutions de l'inéquation :

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
Signe de $x^2 + 5x + 6$		+	0	-	0	+	

Ainsi l'inéquation est vérifiée pour $x \in]-\infty\,;\,-3[\,\cup\,]-2\,;\,+\infty[$

Conclusion : $\frac{e^{5x}}{e^3} > e^{-x^2}e^{-9}$ pour tout $x \in]-\infty\ ;\ -3[\cup]-2\ ;\ +\infty[$