Composition de limites

Enoncé des problèmes résolus dans cette vidéo :

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2}{x^2+1}}$?

$\lim_{x\to\infty} \ln(\frac{1}{x^2} + 1)$?

$\lim_{x\to\infty} \cos(\frac{1}{x})$?

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$?

$\lim_{x\to 0} \ln(\frac{1}{x^2} + 1)$?

$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \cos(\frac{1}{x})$?

Exercices complémentaires suivis de leur corrigé :

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x\to\infty} e^{x^2 - x}$?

$\lim_{x\to\infty} \ln(\frac{x-3}{x+5})$?

$\lim_{x\to-\infty} e^{x^3 - x^2 + 2x}$?

$\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x+4}{x^3+2x+1}}$?

$\lim_{x\to-\infty} \sin(-\frac{1}{x^2})$?

$\lim_{\substack{< \\ x\to 2}} (\frac{1}{(x-2)(x+3)})^3$?

Correction Exercice 2

- $\lim_{x\to\infty} e^{x^2 - x}$?

  $x^2 - x$ est une forme indéterminée que nous devons lever en factorisant par le terme dominant :

  $x^2(1 - \frac{1}{x^2})$

  Quand $x \to \infty$ $\begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} \to 1 \text{ par somme} \\ x^2 \to +\infty \\ x^2(1 - \frac{1}{x^2}) \to +\infty \text{ par produit} \end{cases}$

$$e^{x^2-x} \to +\infty \text{ par composition}$$

Conclusion : $\lim_{x\to\infty} e^{x^2-x} = +\infty$

- $\lim_{x\to\infty} \ln(\frac{x-3}{x+5})$?

$\frac{x-3}{x+5}$ est une forme indéterminée que nous levons en factorisant le numérateur et le dénominateur par le terme dominant, à savoir x :

$$\frac{x-3}{x+5} = \frac{x(1-\frac{3}{x})}{x(1+\frac{5}{x})} = \frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{5}{x}}$$

Quand $x \to \infty$
$$\begin{cases} 1 - \frac{3}{x} \to 1 \text{ par somme} \\ 1 + \frac{5}{x} \to 1 \text{ par somme} \\ \frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{5}{x}} \to 1 \text{ par quotient} \\ \ln\left(\frac{x-3}{x+5}\right) \to 0 \text{ par composition} \end{cases}$$

Conclusion : $\lim_{x\to\infty} \ln(\frac{x-3}{x+5}) = 0$

- $\lim_{x\to-\infty} e^{x^3-x^2+2x}$?

$x^3 - x^2 + 2x$ est une forme indéterminée. Nous levons l'indétermination en factorisant par le terme dominant :

$$x^3 - x^2 + 2x = x^3(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})$$

Quand $x \to -\infty$
$$\begin{cases} 1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2} \to 1 \text{ par somme} \\ x^3(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}) \to -\infty \text{ par produit} \\ e^{x^3-x^2+2x} \to 0 \text{ par composition} \end{cases}$$

Conclusion : $\lim_{x\to-\infty} e^{x^3 - x^2 + 2x} = 0$

- $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x+4}{x^3+2x+1}}$?

Ici il n'y a pas de forme indéterminée. Nous passons directement au calcul des limites :

Quand $x \to 0$ $\begin{cases} \frac{x+4}{x^3+2x+1} \to 4 \text{ par quotient} \\ \sqrt{\frac{x+4}{x^3+2x+1}} \to \sqrt{4} = 2 \text{ par composition} \end{cases}$

Conclusion : $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x+4}{x^3+2x+1}} = 2$

- $\lim_{x\to-\infty} \sin(-\frac{1}{x^2})$?

Il n'y a pas de forme indéterminée donc nous pouvons passer au calcul des limites :

Quand $x \to -\infty$ $\begin{cases} -\frac{1}{x^2} \to 0 \text{ par quotient} \\ \sin\left(-\frac{1}{x^2}\right) \to \frac{\pi}{2} \text{ par composition} \end{cases}$

Conclusion : $\lim_{x\to-\infty} \sin\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$

- $\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left(\frac{1}{(x-2)(x+3)}\right)^3$?

Quand $x \overset{<}{\to} 2$ $\begin{cases} \frac{1}{(x-2)(x+3)} \to -\infty \text{ par quotient} \\ \left(\frac{1}{(x-2)(x+3)}\right)^3 \to -\infty \text{ par composition} \end{cases}$

Conclusion : $\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left(\frac{1}{(x-2)(x+3)}\right)^3 = -\infty$