Suite 2

Variations des Suites (Partie 2)

Enoncé des problèmes résolus dans cette vidéo

Exercice 1

(U_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \sqrt{U_n + 3} \\ U_0 = 6 \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que (U_n) est décroissante.

2) Que se passe-t-il si $U_0 = 1$?

Exercices complémentaires suivis de leur correction

Exercice 2

(V_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} V_{n+1} = \exp(V_n - 10) \\ V_0 = 0 \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que (V_n) est croissante.

2) Que se passe-t-il si $V_0 = 11$?

Exercice 3

(W_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} W_{n+1} = 2\,W_n^{\,2} + 14W_n + 20 \\ W_0 = 0 \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que (W_n) est croissante.

2) Que se passe-t-il si $W_0 = -3$?

Correction Exercice 2

(V_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} V_{n+1} = \exp\,(V_n - 10) \\ V_0 = 0 \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que (V_n) est croissante.

Montrons par récurrence que la propriété P_n qui suit est vraie pour tout $n \geq 0$:

P_n : (V_n) est croissante, càd pour tout $n \geq 0$ $V_{n+1} \geq V_n$

Initialisation : Au rang n = 0, $V_{0+1} = V_1 = \exp(-10) > 0$

Donc $V_1 \geq V_0$

Donc P_0 vraie

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un entier $n \geq 0$ fixé, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$V_{n+1} \geq V_n$

Donc $V_{n+1} - 10 \geq V_n - 10$

$\exp(V_{n+1} - 10) \geq \exp(V_n - 10)$ car exp est croissante sur R^+

$V_{n+2} \geq V_{n+1}$

Donc P_{n+1} est vraie

Donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : P_1 est vraie et la propriété se transmet, donc d'après le principe de récurrence,

$\forall\, n \geq 0$, P_n vraie.

2) Que se passe-t-il si $V_0 = 11$?

Si $V_0 = 11$, nous avons

$V_1 = \exp(1) = e \leq 11$ car $e \cong 2{,}72$

Donc $V_0 \geq V_1$

Comme la fonction exp (x-10) est croissante sur R^+, on peut l'appliquer à l'inégalité ci-dessus sans en changer le sens :

$\exp(V_0 - 10) \geq \exp(V_1 - 10)$

Donc $V_1 \geq V_2$

Puis en appliquant la même fonction à l'inégalité précédente :

$\exp(V_1 - 10) \geq \exp(V_2 - 10)$

Donc $V_2 \geq V_3$

etc…

La suite sera donc cette fois décroissante.

Une récurrence semblable à la précédente permettrait une démonstration rigoureuse de cette affirmation.

Correction Exercice 3

(W_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} W_{n+1} = 2\,W_n^{\,2} + 14W_n + 20 \\ W_0 = 0 \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que (W_n) est positive et croissante.

Montrons par récurrence que la propriété P_n qui suit est vraie pour tout $n \geq 0$:

P_n : (W_n) est croissante et croissante, càd pour tout $n \geq 0$ $W_{n+1} \geq W_n \geq 0$

Initialisation : Au rang n = 0, $W_{0+1} = W_1 = 20 > 0$

Donc $W_1 \geq W_0 \geq 0$

Donc P_0 est vraie

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un entier $n \geq 0$ fixé, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$W_{n+1} \geq W_n \geq 0$

Notons f la fonction définie sur R par:

$f(x) = 2x^2 + 14x + 20$. Ainsi $W_{n+1} = f(W_n)$

Afin de savoir si l'on peut appliquer la fonction f à l'inégalité précédente sans en modifier le sens, nous devons connaitre les variations de la fonction f.

Nous calculons la dérivée de f :

$f'(x) = 4x + 14$

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$+\infty$
Signe de f'		-	0	+	
Sens de variation de f		$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	

Nous avons par hypothèse de récurrence :

$W_{n+1} \geq W_n \geq 0$

d'où $f(W_{n+1}) \geq f(W_n) \geq f(0) = 20 \geq 0$ puisque la fonction f est croissante sur R^+

et donc $W_{n+2} \geq W_{n+1} \geq 0$

Ainsi P_{n+1} est vraie.

Par conséquent $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : P_0 est vraie et la propriété se transmet, donc d'après le principe de récurrence,

$\forall\, n \geq 0$, P_n vraie.

2) Que se passe-t-il si $W_0 = -3$?

Si $W_0 = -3$, alors $W_1 = -4$ Donc $W_0 \geq W_1$

$-4 < -\frac{7}{2}$

Or la fonction f n'est croissante que sur l'intervalle $[-\frac{7}{2} ; +\infty[$

Par conséquent, les inégalités ne seraient pas conservées par application de f.

Mais en calculant $W_2 = f(-4)$ on constate qu'il est égal à – 4 autrement dit à W_1.

On aura par conséquent $W_3 = f(W_2) = f(-4)$ et de même pour tout n supérieur à 3.

Autrement si $W_0 = -3$ alors la suite est constante à partir du rang 1.

(Concrètement, la suite est tombée pile sur un point fixe pour ne plus jamais s'en échapper).