Suite 1

Somme des termes d'une suite géométrique S

Enoncés des problèmes résolus dans cette vidéo:

Démonstration de cours :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q, démontrer que :

$$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n = U_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Exercice 1.

Utiliser cette formule pour déterminer les sommes suivantes :

1) $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{20} = ?$ $\begin{cases} \text{avec} \quad U_{n+1} = 3U_n \\ U_0 = 5 \end{cases}$

2) $V_{10} + V_{11} + \ldots + V_{50} = ?$ $\begin{cases} \text{avec} \quad V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n \\ V_0 = 4 \end{cases}$

3) Déterminer la valeur de la somme S = 5 + 10 + 20 + … + 640

Exercice complémentaire suivi de sa correction

Exercice II

Utiliser la formule donnée en I. pour déterminer la valeur des sommes suivantes :

1) $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{15} = ?$ avec $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{4}{5} U_n \\ U_0 = 2 \end{cases}$

2) $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_9 = ?$ avec $\begin{cases} U_{n+1} = (-7)U_n \\ U_0 = 2 \end{cases}$

3) $V_0 + V_1 + \ldots + V_{99} = ?$ avec $V_n = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

4) $V_{21} + V_{22} + \ldots + V_{43} = ?$ avec $\begin{cases} V_{n+1} = 5\,V_n \\ V_0 = 3 \end{cases}$

5) Déterminer la valeur de la somme S où S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 +…+ 1024

6) Même consigne avec S = 3 -21 + 147 + … + 352947

Correction II.

1) $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{15} = ?$ $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{4}{5} U_n \\ U_0 = 2 \end{cases}$

Nous pouvons appliquer directement la formule de cours de somme des suites géométriques pour réaliser le calcul demandé :

$$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{15} = U_0\frac{1-q^{16}}{1-q}$$

où $q = \frac{4}{5}$ est la raison de la suite géométrique et 16 est le nombre de termes que l'on souhaite sommer.

Cela nous donne :

$$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{15} = 2\frac{1-(\frac{4}{5})^{16}}{1-\frac{4}{5}} = 2\frac{1-(\frac{4}{5})^{16}}{\frac{1}{5}} = 2 \times \frac{5}{1}\left(1-(\frac{4}{5})^{16}\right)$$

= 10 $\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{16}\right)$

Donc $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{15} = 10\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{16}\right)$

2) $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_9 = ?$ avec $\begin{cases} U_{n+1} = (-7)U_n \\ U_0 = 2 \end{cases}$

Nous pouvons appliquer directement la formule de cours de somme des suites géométriques pour réaliser le calcul demandé :

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_9 = U_1 \frac{1-q^9}{1-q}$$

Où q = -7 et 9 est le nombre de termes qu'il nous faut sommer.

Cette fois le premier terme est $U_1 = 2 \times (-7)^1 = -14$.

La formule précédente nous donne donc :

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_9 = -14\frac{1-(-7)^9}{1-(-7)} = -\frac{14}{8}\left(1-(-7)^9\right) = \frac{7}{4}\left((-7)^9 - 1\right)$$

Donc $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_9 = \frac{7}{4}\left((-7)^9 - 1\right)$

3) $V_0 + V_1 + \ldots + V_{99} = ?$ avec $V_n = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

De même que pour 1) et 2) nous avons :

$$V_0 + V_1 + \ldots + V_{99} = V_0 \frac{1-q^{100}}{1-q}$$

Où $q = -\frac{1}{2}$ et la somme comporte 100 termes.

Le premier terme est $V_0 = 8$.

Ceci nous donne :

$V_0+V_1+ \dots +V_{99} = 8\frac{1-(-\frac{1}{2})^{100}}{1-(-\frac{1}{2})} = 8x\frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^{100}) = \frac{16}{3}(1-(-\frac{1}{2})^{100})$

Donc $V_0 + V_1 + \dots + V_{99} = \frac{16}{3}(1-(-\frac{1}{2})^{100})$

4) $V_{21} + V_{22} + \dots + V_{43} = ?$ avec $\begin{cases} V_{n+1} = 5\,V_n \\ V_0 = 3 \end{cases}$

De même que pour les 3 exercices précédents, nous avons :

$V_{21} + V_{22} + \dots + V_{43} = V_{21}\frac{1-q^{23}}{1-q}$

Où q = 5 et le nombre de termes à sommer est 23 = 43-21+1.

Le premier terme est $V_{21} = 3x5^{21}$.

Nous avons donc :

$V_{21} + V_{22} + \dots + V_{43} = 3 \times 5^{21}\,\frac{1-5^{23}}{1-5} = \frac{3}{4}\,5^{21}\,(5^{23} - 1)$

Donc $V_{21} + V_{22} + \dots + V_{43} = \frac{3x5^{21}}{4}(5^{23} - 1)$

5) Déterminer la valeur de la somme S où S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 +…+ 1024

Nous reconnaissons ici la somme des termes d'une suite géométrique, de raison 2 et de premier terme 1.

La formule explicite de la suite est donc $U_n = 1 \times 2^n$.

Afin de pouvoir utiliser la formule de cours, il nous manque un seul élément : nous avons besoin de connaitre le nombre de termes qui sont sommés ici.

Pour cela, nous résolvons $U_n = 1024 = 2^n$

Ceci nous donne $\ln(1024) = \ln(2^n)$

Càd $n = 10 \times \frac{\ln 2}{\ln 2} = 10$

Donc n = 10

Nous pouvons à présent passer par la formule connue pour terminer le calcul :

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 1024 = 1\frac{1-2^{11}}{1-2}$ (on se souvient qu'il y a 11 termes et non 10 car on part de U_0).

D'où $S = 2^{11} - 1$

6) avec S = 3 -21 + 147 + … + 352947

Nous avons à présent à sommer les termes d'une suite géométrique de raison (-7) et de premier terme 3.

Là encore, nous ne connaissons pas le nombre de termes que nous devons sommer.

Nous résolvons donc $U_n = 3 \times (-7)^n = 352947$.

Ceci nous donne n = 6. Nous avons donc 7 termes à sommer.

D'où:

$S = 3 - 21 + 147 + \ldots + 352947 = 3\frac{1-(-7)^7}{1-(-7)} = \frac{3}{8}\left(1 - (-7)^7\right)$

Donc $S = \frac{3}{8}\left(1 - (-7)^7\right)$