Suite 2

Variations des suites S

Enoncé des problèmes résolus dans cette vidéo

Exercice 1.

Déterminer les variations des suites suivantes (choisissez bien votre méthode…) :

a. $U_n = \frac{3n+1}{2}$

b. $V_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c. $W_n = \frac{2}{3^n}$

d. $r_n = \frac{7^n}{6^{n+1}}$

e. $S_n = -10 \times \left(\frac{10}{11}\right)^n$

Exercice 2.

Même consigne :

a. $U_n = -n^2 + 5n + 6$

b. $V_n = \frac{3n-2}{n+5}$

c. $W_n = 3 \times 1{,}2^n$

d. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

e. $t_{n+1} = t_n + \frac{5}{n+2}$

f. $w_n = \frac{2^n}{n!}$

Exercices complémentaires suivis de leur correction

Exercice 3.

Déterminer les variations des suites suivantes (choisissez bien votre méthode…) :

a. $U_n = \frac{12^{n+2}}{11^n}$

b. $V_n = 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

c. $W_n = 4 + 7n$

d. $r_n = 5n^2 - 10n - 30$

e. $S_n = -24 \times \frac{1}{6^{n+1}}$

Exercice 4.

Même consigne :

a. $U_n = 2 \times 17^{n-1}$ définie pour tout $n \geq 1$

b. $V_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$

c. $W_{n+1} = W_n - \frac{1}{n^2}$ définie pour tout $n \geq 1$

d. $S_n = \frac{2n^2 - 4}{2n^2 + 3n + 1}$

e. $t_n = \ln(4^{3n+1})$

f. $w_n = -3 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n$

Correction Exercice 3 :

a. $U_n = \frac{12^{n+2}}{11^n}$

Nous ne sommes pas loin d'une suite géométrique définie de manière explicite. Pour y parvenir complètement, il nous faut mettre le numérateur et le dénominateur à la même puissance :

$U_n = \frac{12^2 \text{ x } 12^n}{11^n} = 12^2 \text{ x } \frac{12^n}{11^n} = 12^2 \text{ x } (\frac{12}{11})^n$

(U_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{12}{11}$ et de premier terme 12^2=144.

La raison est strictement supérieure à 1 et le premier terme est strictement positif.

La suite (U_n) est donc croissante.

b. $V_n = 5 \text{ x } (-\frac{1}{3})^n$

Nous reconnaissons ici la définition explicite d'une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme 5.

La raison est strictement comprise entre 0 et 1 et le premier terme est positif.

La suite (V_n) est par conséquent ni croissante ni décroissante. (Elle oscille tout en tendant vers 0.)

c. $W_n = 4 + 7n$

Nous avons une suite arithmétique, définie de manière explicite, de premier terme 4 et de raison 7, strictement supérieure à 1.

Par conséquent, la suite (W_n) est croissante.

d. $r_n = 5n^2 - 10n - 30$

Nous avons $r_n = f(n)$ avec $f(x) = 5x^2 - 10x - 30$ la fonction associée

Nous allons étudier le sens de variation de la fonction f afin de connaitre celui de la suite (r_n).

Nous commençons par dériver la suite f :

$f'(x) = 10x - 10$

$10x - 10 \geq 0$ pour $x \geq 1$

D'où le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de f'		-	0	+	
Sens de variation de f	↘		-35		↗

La fonction f est croissante pour x supérieur ou égal à 1.

La suite (r_n) a le même sens de variation que sa fonction associée donc elle est croissante à partir du rang n = 1.

e. $S_n = -24 \times \frac{1}{6^{n+1}}$

De même que précédemment (ex.3 a.), nous allons devoir retravailler un peu l'expression de (S_n) afin de parvenir à l'expression explicite d'une suite géométrique :

$S_n = -24 \times \frac{1}{6 \times 6^n} = -\frac{24}{6} \times \frac{1}{6^n} = -4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$

On reconnait alors une suite géométrique de premier terme -4 et de raison $\frac{1}{6}$.

La raison est strictement comprise entre 0 et 1 mais le premier terme est strictement négatif.

La suite (S_n) est donc croissante.

Correction Exercice 4.

a. $U_n = 2 \times 17^{n-1}$ définie pour tout $n \geq 1$

Nous reconnaissons ici la définition explicite d'une suite géométrique de raison 17 et de premier terme $U_1 = 2$.

La raison est strictement supérieure à 1 et le premier terme est positif.

La suite (U_n) est donc croissante.

b. $V_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$

Nous avons affaire ici à une somme. Les termes V_n et V_{n+1} ne diffèrent que d'un terme, la méthode adaptée à cet exercice est donc l'étude du signe de $V_{n+1} - V_n$:

$V_{n+1} - V_n = [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2] - [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2]$

$= (n+1)^2$

Or $(n+1)^2 > 0$

Donc $V_{n+1} - V_n > 0$

Donc la suite (V_n) est strictement croissante.

c. $W_{n+1} = W_n - \frac{1}{n^2}$ définie pour tout $n \geq 1$

(<u>Remarque préliminaire</u> : La suite (W_n) est définie par récurrence. Vous seriez donc en droit de vous demander pourquoi l'énoncé ne vous donne pas de premier terme. Nous ne donnons pas de valeur explicite au premier terme car ce n'est pas nécessaire ici : sa valeur n'aura aucun impact sur le sens de variation de la suite. N'hésitez pas à essayer de construire cette suite avec différents premiers termes, si cela vous aide à vous en convaincre.)

Comme nous l'avons vu ensemble, la méthode la plus adaptée ici est à nouveau l'étude du signe de $W_{n+1} - W_n$:

$W_{n+1} - W_n = -\frac{1}{n^2}$

Or $-\frac{1}{n^2} < 0$

Donc $W_{n+1} - W_n < 0$

Donc $W_{n+1} < W_n$

Donc la suite (W_n) est strictement décroissante.

d. $S_n = \frac{n^2 + 2n + 7}{n + \frac{1}{2}}$

La fonction associée à la suite (S_n) est f :

$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 7}{x + \frac{1}{2}}$ bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

Comme les variations de (S_n) sont identiques à celles de f, nous allons étudier le sens de variation de la fonction f.

Nous dérivons f :

f' (x) = $\dfrac{(2x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x^2+2x+7\right)1}{(x+\frac{1}{2})^2} = \dfrac{2x^2+x+2x+1-(x^2+2x+7)}{(x+\frac{1}{2})^2} = \dfrac{x^2+x-6}{(x+\frac{1}{2})^2}$

Nous résolvons $x^2 + x - 6 = 0$ avec la méthode du discriminant.

On trouve $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

Comme $\dfrac{1}{(x+\frac{1}{2})^2}$ est strictement positif, le signe de f' est donné par le signe du polynôme

$x^2 + x - 6$.

D'où le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de f'		+	0	-	‖	-	0	+	
Variations de f		↗	-4	↘	‖	↘	6	↗	

Les indices de la suite ne prenant leurs valeurs que parmi les entiers naturels, la suite (S_n) est décroissante de 0 à 2 et croissante à partir de n = 2.

e. $t_n = \ln(4^{3n+1})$

<u>Remarque préliminaire</u> : cette étude de suite n'est évidemment possible qu'à partir du moment où la fonction logarithme népérien (ln) a été vue en cours.

L'une des propriétés de la fonction ln est de faire « tomber les puissances ». Ceci nous permet de simplifier l'écriture de la suite t_n :

$t_n = (3n+1) \times \ln(4) = \ln 4 + (3\ln 4)n$

On reconnait alors l'écriture explicite d'une suite arithmétique de premier terme ln4 et de raison 3ln4.

$\ln(4) \cong 1{,}4$

Donc $3\ln 4 > 0$

Par conséquent la suite (t_n) est strictement croissante.

f. $w_n = -3 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n$

La suite (w_n) est une suite géométrique, définie de manière explicite, dont le premier terme est -3 et la raison est $\frac{1}{7}$.

La raison est strictement comprise entre 0 et 1, mais le premier terme est négatif.

Ainsi la suite (w_n) est croissante sur l'ensemble des entiers naturels.