Utiliser les propriétés algébriques

Enoncés des problèmes résolus dans cette vidéo :

Exercice 1

a) Montrer que $\forall$ x, $2e^{x-1} < e^{x}$.

b) Montrer que $\dfrac{e^{x+3}}{e^{x-5}}$ est une constante.

c) Montrer que $\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

d) Montrer que $e^{2x} - 5e^{x} + 2$ est un polynôme en e^{x}.

Exercice complémentaire suivi de sa correction :

Exercice 2

a) Montrer que $\dfrac{e^{3(x-1)}}{e^{2(\frac{3}{2}x+1)}}$ est une constante.

b) Montrer que $\forall$ x, $e^{2x} \leq e^{x^2+1}$.

c) Montrer que $\dfrac{\left(e^{x} - e^{-2x}\right)\left(e^{x} + e^{-2x}\right)}{1 - e^{-6x}} = e^{2x}$.

d) Montrer que $e^{6x} + 3e^{4x} + 1$ est un polynôme en e^{2x}.

Correction Exercice 2

Nous rappelons les formules vues dans le cours et que nous allons exploiter dans les 4 questions de l'exercice 2 :

- $e^{a+b} = e^a e^b$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

a) Montrer que $\dfrac{e^{3(x-1)}}{e^{2(\frac{3}{2}x+1)}}$ est une constante.

D'après les propriétés de l'exponentielle rappelées ci –dessus, nous avons :

$$\frac{e^{3(x-1)}}{e^{2(\frac{3}{2}x+1)}} = \frac{e^{3x-3}}{e^{3x+2}} = \frac{\frac{e^{3x}}{e^3}}{e^{3x}e^2} = \frac{\cancel{e^{3x}}}{e^3} \text{X} \frac{1}{\cancel{e^{3x}}e^2} = \frac{1}{e^3 e^2} = \frac{1}{e^{3+2}} = \frac{1}{e^5}$$

Conclusion : $\dfrac{e^{3(x-1)}}{e^{2(\frac{3}{2}x+1)}} = \dfrac{1}{e^5}$

b) Montrer que $\forall$ x, $e^{2x} \leq e^{x^2+1}$.

Montrer que $\forall$ x, $e^{2x} \leq e^{x^2+1}$

est équivalent à montrer que $\forall$ x, $\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}} \leq \dfrac{e^{x^2+1}}{e^{2x}}$ car $\forall$ x $e^x > 0$

ce qui est encore équivalent à $1 \leq e^{x^2+1-2x}$ d'après les propriétés de l'exponentielle.

Montrons que cette dernière inégalité est toujours vraie :

$\forall$ x, $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$

Comme l'exponentielle est croissante sur R, nous pouvons l'appliquer à l'inégalité précédente sans en changer le sens, donc

$e^{(x-1)^2} \geq e^0 = 1$

Ainsi, pour tout x dans R, $1 \leq e^{x^2+1-2x}$,

Donc $e^{2x} \leq e^{x^2+1}$.

c) Montrer que $\frac{(e^{x} - e^{-2x})(e^{x} + e^{-2x})}{1 - e^{-6x}} = e^{2x}$.

Comme le membre de droite n'est pas transformable, nous allons partir du membre de gauche et le transformer pour arriver à l'expression du membre de droite.

Avant de commencer les calculs, il convient de remarquer que le numérateur du membre de gauche est une identité remarquable. (Si l'on ne le remarque pas, on arrivera au même résultat mais avec quelques lignes de calcul en plus).

En effet, on pose $a = e^{x}$ et $b = e^{-2x}$

Le numérateur peut alors se réécrire comme suit :

$(e^{x} - e^{-2x})\,(e^{x} + e^{-2x}) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = (e^{x})^2 - (e^{-2x})^2 = e^{2x} - e^{-4x}$

Ainsi nous avons :

$$\frac{(e^{x} - e^{-2x})(e^{x} + e^{-2x})}{1 - e^{-6x}} = \frac{e^{2x} - e^{-4x}}{1 - e^{-6x}}$$

La dernière étape consiste à factoriser le numérateur par e^{2x} (puisque c'est ce que l'on veut obtenir), tout en utilisant les propriétés de l'exponentielle :

$$\frac{e^{2x} - e^{-4x}}{1 - e^{-6x}} = \frac{e^{2x}(1 - e^{-6x})}{1 - e^{-6x}} = e^{2x}$$

Conclusion : $\frac{(e^{x} - e^{-2x})(e^{x} + e^{-2x})}{1 - e^{-6x}} = e^{2x}$

d) Montrer que $e^{6x} + 3e^{4x} + 1$ est un polynôme en e^{2x}.

L'idée ici est de poser $x = e^{2x}$ et puis de remplacer dans l'expression donnée dans l'énoncé :

$e^{6x} + 3e^{4x} + 1 = x^3 + 3x^2 + 1 = (e^{2x})^3 + 3(e^{2x})^2 + 1$

Donc nous avons bien un polynôme en e^{2x}.