Calcul des dérivées

Enoncés des problèmes résolus dans cette vidéo :

Exercice 1

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

A.

f(x) = $3x^2 + 7x + 6$

g(x) = $\dfrac{x^2+7}{2x-1}$

h(x) = $x^2\sqrt{x} + x$

B.

f(x) = $\sqrt{3x+5}$

g(x) = $(x^2 - 1)^3$

C.

f(x) = $\dfrac{x^2\sqrt{x}}{x-3}$

Enoncés des exercices complémentaires suivis de leur corrigé :

Exercice 2

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

A.

f(x) = $-9x^4 + x^3 - 6x^2 + 2x - 5$

g(x) = $\sqrt{x^7 - 3x^3 + 2}$

B.

f(x) = $\left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 6\right)^2$

g(x) = $\frac{x^2+2}{x^4-3x}$

h(x) = $\frac{(\sqrt{3}x^3 - \sqrt{2}x^2)(5x+7)}{3x^9 - 2x^4}$

C.

f(x) = $\sqrt{x} + 3x^5 - 10\sqrt{x}\,x$ pour tout x > 0

Correction Exercice 2

A.

f(x) = $-9x^4 + x^3 - 6x^2 + 2x - 5$

f est une somme de termes à dériver.

f'(x) = $-4*9x^3 + 3*x^2 - 2*6x + 2$

Donc f'(x) = $-36x^3 + 3x^2 - 12x + 2$

A.

g(x) = $\sqrt{x^7 - 3x^3 + 2}$

g est du type $\sqrt{u}$

où u(x) = $x^7 - 3x^3 + 2$

Donc sa dérivée vaut $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Ceci nous donne :

u' (x) = $7 * x^6 - 3 * 3x^2 = 7x^6 - 9x^2$

Donc g'(x) = $\frac{7x^6 - 9x^2}{2\sqrt{x^7 - 3x^3 + 2}}$

B.

f(x) = $(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 6)^2$

f est du type u^2

où u(x) = $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 6$

donc la dérivée de f est du type 2 u'u

Nous avons u'(x) = $3 * \frac{1}{3}x^2 + 2 * 2x = x^2 + 4x$

Ceci nous permet de calculer f' :

f'(x) = $2(x^2 + 4x)(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 6)$

Nous développons l'expression ci-dessus:

f'(x) = $2(\frac{1}{3}x^5 + 2x^4 - 6x^2 + 4 * \frac{1}{3}x^4 + 4 * 2x^3 - 4 * 6x)$

$= \frac{2}{3}x^5 + 2(2 + \frac{4}{3})x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x$

Donc f'(x) = $\frac{2}{3}x^5 + \frac{20}{3}x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x$

B.

g(x) = $\frac{x^2 + 2}{x^4 - 3x}$

g est du type $\frac{u}{v}$

avec u(x) = $x^2 + 2$

et v(x) = $x^4 - 3x$

Donc d'après la formule du cours, g' sera de la forme $\frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

Nous avons u'(x) = 2x

et v'(x) = $4x^3 - 3$

Donc g'(x) = $\frac{2x\left(x^4 - 3x\right) - \left(x^2 + 2\right)(4x^3 - 3)}{(x^4 - 3x)^2}$

Nous développons à présent l'expression ci-dessus :

g'(x) = $\frac{2x^5 - 2*3x^2 - (4x^5 - 3x^2 + 2*4x^3 - 6)}{(x^4 - 3x)^2}$

= $\frac{2x^5 - 2*3x^2 - 4x^5 + 3x^2 - 2*4x^3 + 6)}{(x^4 - 3x)^2}$

D'où g'(x) = $\frac{-2x^5 - 8x^3 - 3x^2 + 6)}{(x^4 - 3x)^2}$

B.

h(x) = $\frac{\left(\sqrt{3}x^3 - \sqrt{2}x^2\right)(5x + 7)}{3x^9 - 2x^4}$

h est un peu plus compliquée ici car son aspect global est du type $\frac{u}{v}$ tandis que son numérateur n'est plus une somme mais un produit.

Cependant, si nous observons un peu la fraction, nous remarquons ce qui suit :

$3x^9 - 2x^4$ = $(\sqrt{3}x^3 - \sqrt{2}x^2)(\sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2)$ en tant qu'identité remarquable

Le dénominateur peut donc se décomposer en produit de deux fractions dont l'une est égale au premier terme du produit du numérateur.

Ceci nous permet de simplifier h comme suit :

h(x) = $\dfrac{\cancel{(\sqrt{3}x^3 - \sqrt{2}x^2)}(5x+7)}{\cancel{(\sqrt{3}x^3 - \sqrt{2}x^2)}(\sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2)} = \dfrac{5x+7}{\sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2}$

Ainsi, nous avons transformé h en un quotient du type $\dfrac{u}{v}$

Avec

u(x) = 5x + 7

Et v(x) = $\sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2$

D'après le cours, la dé rivée de h est de la forme $\dfrac{u'v - u\,v'}{v^2}$.

Nous calculons :

u'(x) = 5

v'(x) = $3\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{2}x$

D'où :

g'(x) = $\dfrac{5\left(\sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2\right) - (5x+7)(3\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{2}x)}{(\sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2)^2}$

Nous développons g' :

g'(x) = $\dfrac{5\sqrt{3}\,x^3 + 5\sqrt{2}\,x^2 - (15\sqrt{3}x^3 + 10\sqrt{2}x^2 + 21\sqrt{3}x^2 + 14\sqrt{2}x)}{(\sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2)^2}$

= $\dfrac{5\sqrt{3}\,x^3 + 5\sqrt{2}\,x^2 - 15\sqrt{3}x^3 - 10\sqrt{2}x^2 - 21\sqrt{3}x^2 - 14\sqrt{2}x}{(\sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2)^2}$

Donc g'(x) = $\dfrac{-10\sqrt{3}\,x^3 - (5\sqrt{2} + 21\sqrt{3})\,x^2 - 14\sqrt{2}x}{(\sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2)^2}$

Remarque : Nous venons de voir un « point méthode » important dans cet exercice, à savoir qu'il faut sans cesse essayer de simplifier les calculs et ne pas se précipiter dessus sans les avoir un tant soit peu observés/analysés pour savoir vers où l'on doit aller.

c.

$f(x) = \sqrt{x} + 3x^5 - 10\sqrt{x}\,x$ pour tout $x > 0$

f est une somme comportant notamment un produit de fonctions. La dérivée de f sera donc la somme des dérivées des termes de f.

Afin de nous simplifier les calculs, nous décomposons le travail et commençons par calculer la dérivée du terme produit : $\sqrt{x}\,x$

Nous rappelons la formule du cours nous donnant la dérivée d'un produit :

$(uv)' = u'v - uv'$

Nous posons $u(x) = x$

Et $v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = 1$

et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc $(u\,v)' = \sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}$ car $x > 0$

Càd $(u\,v)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 15x^4 - 10\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$

Donc $f'(x) = 15x^4 - \frac{30}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$