Suite 2

Raisonnement par récurrence

Enoncé des problèmes résolus dans cette vidéo

Exercice 1

Chaque fois par récurrence,

a) Démontrer que $\forall\, n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n\text{-}1 + n = \dfrac{(n+1)n}{2}$

b) Démontrer que $\forall n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) Démontrer que $\forall n \geq 4$, $2^n \geq n^2$

Exercices complémentaires suivis de leur correction

Exercice 2

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

a) $\forall\, n \geq 1$, $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

b) $\forall\, n \geq 1$, $\quad 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2(n-1) + 2n = n(n+1)$

c) La suite (U_n) définie ci-dessous, vérifie :

$\forall\, n \geq 1$, $U_n \leq \dfrac{1}{2} n^2 + 2$

Où $U_n = n + \dfrac{3}{2}$ pour tout entier naturel

Exercice 3

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

a) La suite (U_n) définie ci-dessous, vérifie :

$\forall\, n \geq 0$, $U_n \leq 8$

Avec :

$$\begin{cases} U_n = \sqrt{U_n + 8} \\ U_0 = 8 \end{cases}$$

b) $\forall\, n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n-1 = n^2$

c) $\forall\, n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$

Correction Exercice 2

a) $\forall\, n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Montrons par récurrence que la propriété P_n qui suit est vraie pour tout $n \geq 1$:

P_n : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Initialisation : Au rang n = 1, $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 = 1^3$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un entier $n \geq 1$ fixé, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $+ (n+1)^3$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

Membre de droite mis au même dénominateur

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$

On reconnait une identité remarquable

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

Donc P_{n+1} est vraie d'où $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : P_1 est vraie et la propriété se transmet, donc d'après le principe de récurrence,

$\forall\, n \geq 1$, P_n vraie.

b) $\forall\, n \geq 1$, $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2(n-1) + 2n = n(n+1)$

Montrons par récurrence que la propriété P_n qui suit est vraie pour tout $n \geq 1$:

P_n : $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2(n-1) + 2n = n(n+1)$

Initialisation : Au rang n = 1, $2 = 1(1+1)$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un entier $n \geq 1$ fixé, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2(n-1) + 2n = n(n+1)$ $\quad +2(n+1)$

$2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2(n-1) + 2n + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1)$

$2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2(n-1) + 2n + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$

Donc P_{n+1} est vraie donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : P_1 est vraie et la propriété se transmet, donc d'après le principe de récurrence,

$\forall\, n \geq 1$, P_n vraie.

Remarque :

Vous aurez bien entendu reconnu ici la somme des n premiers nombres pairs. Le résultat démontré par récurrence peut se retrouver très facilement en factorisant par 2 toute la somme. On reconnait alors la somme des n premiers entiers dont le résultat est connu.

c) La suite (U_n) définie ci-dessous, vérifie :

$\forall\, n \geq 1\,,\; U_n \leq \frac{1}{2}n^2 + 2$

Où $U_n = n + \frac{3}{2}$ pour tout entier naturel

Montrons par récurrence que la propriété P_n qui suit est vraie pour tout $n \geq 1$:

P_n : $U_n \leq \frac{1}{2}n^2 + 2$

Initialisation : Au rang n = 1, $U_1 = \frac{5}{2} = 1/2 + 2$

Donc P_1 est vraie.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un entier naturel $n \geq 1$ fixé, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$U_n \leq \frac{1}{2}n^2 + 2$,

Càd $n + \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}n^2 + 2$

Donc $n + 1 + \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}n^2 + 2 + 1$

Afin de faire apparaitre le membre de droite souhaité, à savoir $\frac{1}{2}(n+1)^2 + 2$, nous allons montrer que $\frac{1}{2}n^2 + 2 + 1 \leq \frac{1}{2}(n+1)^2 + 2$.

Pour cela, on peut raisonner par équivalence :

$$\frac{1}{2}n^2 + 2 + 1 \leq \frac{1}{2}(n+1)^2 + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n^2 + 1 \leq \frac{1}{2}(n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(n^2 + 2\right) \leq \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1)$$

$\Leftrightarrow \quad n^2 + 2 \leq n^2 + 2n + 1$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 2n - 1 \qquad \Leftrightarrow \quad 1/2 \leq n$

Qui est vraie pour tout $n \geq 1$.

Donc par équivalence, nous avons bien $\frac{1}{2}n^2 + 2 + 1 \leq \frac{1}{2}(n+1)^2 + 2$

Donc $(n+1) + \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}n^2 + 2 + 1 \leq \frac{1}{2}(n+1)^2 + 2$

Autrement dit $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(n+1)^2 + 2$

Donc P_{n+1} est vraie donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : P_1 est vraie et la propriété se transmet, donc d'après le principe de récurrence,

$\forall\, n \geq 1$, P_n vraie.

Correction Exercice 3

a) $\forall\, n \geq 0$, $U_n \leq 8$

Avec :

$$\begin{cases} U_n = \sqrt{U_n + 8} \\ U_0 = 8 \end{cases}$$

Montrons par récurrence que la propriété P_n qui suit est vraie pour tout $n \geq 0$:

P_n : $U_n \leq 8$

Initialisation : Au rang $n = 0$, $U_0 = 8 \leq 8$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un entier $n \geq 0$ fixé, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$U_n \leq 8$

Donc $U_n + 8 \leq 8 + 8$

Donc $\sqrt{U_n + 8} \leq \sqrt{8 + 8}$ car la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante sur R^+

$U_{n+1} \leq \sqrt{16} = 4 \leq 8$

Donc P_{n+1} est vraie donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : P_0 est vraie et la propriété se transmet, donc d'après le principe de récurrence,

$\forall\ n \geq 0$, P_n vraie.

b) $\forall\ n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n\text{-}1 = n^2$

Montrons par récurrence que la propriété P_n qui suit est vraie pour tout $n \geq 1$:

P_n : $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n\text{-}1 = n^2$

Initialisation : Au rang n = 1, $1 = 1^2$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un entier $n \geq 1$ fixé, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1$

On reconnait une identité remarquable dans le membre de droite, d'où :

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$

Donc P_{n+1} est vraie d'où $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : P_1 est vraie et la propriété se transmet, donc d'après le principe de récurrence

$\forall$ n $\geq$ 1, P_n vraie.

c) $\forall$ n $\geq$ 1,   n! $\geq 2^{n-1}$

Montrons par récurrence que la propriété P_n qui suit est vraie pour tout n $\geq$ 1 :

P_n :   n! $\geq 2^{n-1}$

Initialisation : Au rang n = 1, 1! = 1 $\geq 2^0$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un entier n $\geq$ 1 fixé, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

n! $\geq 2^{n-1}$

2 x n! $\geq$ 2 x 2^{n-1}

Ou encore 2n! $\geq 2^n$

Pour obtenir le membre de gauche cherché, à savoir (n+1)!, il suffit de remarquer

(n+1)! = (n+1) n! est supérieur à 2n! pour tout n $\geq$ 1.

Par conséquent pour tout n $\geq$ 1, (n+1)! = 2 n! $\geq$ 2^n

Donc P_{n+1} est vraie d'où $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : P_1 est vraie et la propriété se transmet, donc d'après le principe de récurrence

$\forall$ n $\geq$ 1, P_n vraie.