Calculer la dérivée d'une $1/x^n$

Enoncés des problèmes résolus dans cette vidéo :

Exercice 1

1) Déterminer les dérivées de

$f(x) = 1/x^3$

$g(x) = 1/x^5$

2) En déduire la formule de dérivées de fonctions du type : $1/x^n$

Dériver $f(x) = \dfrac{5}{(x^2+1)^4}$

Enoncés des exercices complémentaires suivis de leur corrigé :

Exercice 2

1) Déterminer les dérivées de

$f(x) = 1/\ x^2$

$g(x) = 1/\ x^4$

2) Dériver $f(x) = \dfrac{1}{(x^4+x+1)^3}$

Exercice 3

1) Déterminer les dérivées de

$f(x) = 1/ x^6$

$g(x) = 1/ x^9$

2) Dériver $f(x) = \frac{2}{(x^2 - 5)^7}$

Bonus

Dériver $f(x) = \frac{3x + 1}{(x^2 - 5)^7}$

Correction Exercice 2

1) $f(x) = 1/ x^2$

Nous utilisons la méthode de la puissance négative, qui comme nous l'avons vu dans le cours, est bien plus efficace dans ce genre de situation :

Nous commençons par transformer la puissance positive en une puissance négative :

$f(x) = 1/ x^2 = x^{-2}$

Donc $f'(x) = (- 2)* x^{- 2 - 1} = - 2 x^{- 3} = \frac{-2}{x^3}$

Conclusion : $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

1) $g(x) = 1/ x^4$

Nous utilisons la méthode de la puissance négative.

Nous commençons par transformer la puissance positive en une puissance négative :

$g(x) = 1/ x^{4} = x^{-4}$

Donc $g'(x) = (-4) * x^{-4-1} = -4\, x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$

Conclusion : $g'(x) = \frac{-4}{x^5}$

2) Dériver $f(x) = \frac{1}{(x^4 + x + 1)^3}$

Nous dérivons f comme une fonction du type $\frac{1}{u^3}$, avec $u(x) = x^4 + x + 1$, et non comme un quotient du type u/v.

Ainsi nous avons $f'(x) = \frac{-3u'}{u^4}$ car la dérivée de $\frac{1}{x^3}$ est $\frac{-3}{x^4}$

Nous avons $u'(x) = 4x^3 + 1$

Donc $f'(x) = \frac{-3(4x^3 + 1)}{(x^4 + x + 1)^4} = \frac{-12x^3 - 3}{(x^4 + x + 1)^4}$

Conclusion : $f'(x) = \frac{-12x^3 - 3}{(x^4 + x + 1)^4}$

Correction Exercice 3

1) $f(x) = 1/ x^{6}$

Nous utilisons la méthode de la puissance négative, qui comme nous l'avons vu dans le cours, est bien plus efficace dans ce genre de situation :

Nous commençons par transformer la puissance positive en une puissance négative :

$f(x) = 1/ x^{6} = x^{-6}$

Donc $f'(x) = (-6) * x^{-6-1} = -6\, x^{-7} = \frac{-6}{x^7}$

Conclusion : $f'(x) = \frac{-6}{x^7}$

1) $g(x) = 1/ x^9$

Nous utilisons la méthode de la puissance négative.

Nous commençons par transformer la puissance positive en une puissance négative :

$g(x) = 1/ x^9 = x^{-9}$

Donc $g'(x) = (- 9)* x^{- 9 - 1} = - 9 x^{- 10} = \frac{-9}{x^{10}}$

Conclusion : $g'(x) = \frac{-9}{x^{10}}$

2) Dériver $f(x) = \frac{2}{(x^2 - 5)^7}$

Conformément à ce que nous avons pu voir dans le cours, nous dérivons f, non pas comme un quotient du type u/v, mais plutôt comme une fonction du type $2*\frac{1}{u^7}$, avec $u(x) = x^2 - 5$.

Ainsi, f' est du type $2*\frac{-7u'}{u^8}$.

Nous avons $u'(x) = 2x$

Donc $f'(x) = 2*\frac{-7*2x}{(x^2 - 5)^8} = \frac{- 28x}{(x^2 - 5)^8}$

Conclusion $f'(x) = \frac{- 28x}{(x^2 - 5)^8}$

Correction Bonus

Dériver $f(x) = \frac{3x + 1}{(x^2 - 5)^7}$

Remarque : Nous voyons ici une autre méthode pour calculer la dérivée de ce quotient que vous dériveriez spontanément comme une fonction du type u/v. Celle-ci est plus efficace et plus sûre dans la mesure où les risques d'erreurs de calcul sont moindres.

Nous considérons f comme un produit, et non comme un quotient :

f = u*v

Avec u = 3x + 1

Et v = $\frac{1}{(x^2-5)^7}$

Nous appliquons la formule de cours pour calculer f' :

f' = u'v + uv'

Nous avons u'(x) = 3

Et v'(x) = $\frac{-7*2x}{(x^2-5)^8}$ comme nous venons de le calculer dans l'exercice 3.

Càd v'(x) = $\frac{-14x}{(x^2-5)^8}$

Ceci nous permet de calculer f' :

f'(x) = 3* $\frac{1}{(x^2-5)^7}$ + (3x+1)* $\frac{(-14x)}{(x^2-5)^8}$

On met les deux termes au même dénominateur puis on développe le numérateur :

f'(x) = $\frac{3x^2-15-42x^2-14x}{(x^2-5)^8}$ = $\frac{-39x^2-14x-15}{(x^2-5)^8}$

Conclusion f'(x) = $\frac{-39x^2-14x-15}{(x^2-5)^8}$